

Numerische Untersuchung wandnaher Transport- und Strukturbildungsprozesse in turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTORINGENIEUR

(Dr.-Ing.)

vorgelegt der

Fakultät für Maschinenbau der

Technischen Universität Ilmenau

von Frau

Dipl.-Ing. Nan Shi

geboren am 15.12.1979 in Henan, China

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Jörg Schumacher
2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. André Thess
3. Gutachter: PD. Dr.-Ing. habil. Olga Shishkina

Tag der Einreichung: 28.08.2013

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 18.12.2013

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013000563

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Teil-Projektes RB-2 “Numerische Untersuchung wandnaher Transport- und Strukturbildungsprozesse in turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion” der Forschergruppe FOR 1182 der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG).

Zunächst möchte ich meine tiefe Dankbarkeit an Prof. Jörg Schumacher zum Ausdruck bringen. Durch seine kontinuierliche Unterstützung und Ermutigung während der Promotion, konnte diese Arbeit erfolgreich abgeschlossen werden. Es war eine große Freude für mich, seine Doktorandin zu sein.

Im Folgenden möchte ich mich bei Mohammad S. Emran für die Parallelisierung des DNS Verfahrens, seine Unterstützung bei der Weiterentwicklung des Programms und die gute Zusammenarbeit während meiner Zeit im Fachgebiet Strömungsmechanik bedanken.

Weiterhin möchte mich für die Unterstützung durch das Jülich Supercomputing Centre (Deutschland) und das Rechenzentrum der TU Ilmenau bedanken.

Besonders möchte ich mich bei Prof. André Thess für seine fruchtbaren Diskussionen und Vorschläge in den regelmäßigen ”Fass-Beratungen” bedanken.

Dann möchte ich mich bei Prof. Roberto Verzicco für die Bereitstellung seines originalen Codes bedanken.

Vor allem möchte mich bei Dr. Ronald du Puits, Dr. Christian Resagk, Ling Li und den anderen Mitgliedern unseres Instituts für die Hilfe während der Promotion bedanken.

Schließlich möchte mich bei der Forschergruppe FOR 1182 in der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) bedanken.

Kurzfassung

In der vorliegenden Dissertation wurde die Struktur der Grenzschichten in turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion durch dreidimensionale direkte numerische Simulationen untersucht. Zuerst wurde die Konvektion in einer zylindrischen Zelle mit einem Seitenverhältnis von Eins bei den Rayleighzahlen $Ra = 3 \cdot 10^9$ und $Ra = 3 \cdot 10^{10}$ und bei fester Prandtlzahl $Pr = 0.7$ betrachtet. Ähnlich wie bei den experimentellen Ergebnissen in der gleichen Konfiguration und für die gleiche Prandtlzahl wichen die Grenzschichten der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder von den Vorhersagen der Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie ab. Die Abweichungen werden kleiner, wenn ein dynamisches Reskalieren der Daten mit einer instantan definierten Grenzschichtdicke durchgeführt und die Analyseebene mit der momentanen Richtung der großskaligen Zirkulation in der geschlossenen Zelle ausgerichtet wurde. Die physikalischen Gründe für die Abweichungen der Grenzschichtprofile von der klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen und Stewartson-Theorien für erzwungene und natürliche Konvektion wurden im Detail untersucht. Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass wichtige Annahmen für die klassischen laminaren Grenzschichttheorien für erzwungene und natürliche Konvektion verletzt werden, wie die strikte Zweidimensionalität der Dynamik oder der Stationarität. Schließlich wurde die Grenzschichtdynamik bei drei unterschiedlichen Prandtlzahlen $Pr = 7, 0.7, 0.1$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ verglichen. Hier zeigte sich, dass mit zunehmender Prandtlzahl dynamisches Skalieren die Vereinbarung mit der Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie verbessert. Die thermische Plumeablösung scheint eine der Hauptursachen für die Abweichungen von der klassischen Grenzschichttheorie. Mit abnehmender Prandtlzahl wird die thermische Grenzschichtdicke dicker. Der Winkel der momentanen großskaligen Zirkulation hat weniger Fluktuation für die größere Prandtlzahl. Mit abnehmender Prandtlzahl nimmt die mittlere Amplitude der momentanen großskaligen Zirkulation zu.

Abstract

In the present thesis the structure of the boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection is studied by means of three-dimensional direct numerical simulations. At first is considered convection in a cylindrical cell at an aspect ratio of one for Rayleigh numbers of $Ra = 3 \cdot 10^9$ and $Ra = 3 \cdot 10^{10}$ at fixed Prandtl number $Pr = 0.7$. Similar to the experimental results in the same setup and for the same Prandtl number deviated the boundary layers of the velocity and temperature fields from the prediction of the Prandtl-Blasius-Pohlhausen theory. Deviations get smaller when a dynamical rescaling of the data with an instantaneously defined boundary layer thickness is performed and the analysis plane is aligned with the instantaneous direction of the large-scale circulation in the closed cell. The physical reasons for the deviations of the boundary layer profiles from the classical Prandtl-Blasius-Pohlhausen and Stewartson theories for forced and natural convection were investigated in detail. The numerical results demonstrate that important assumptions which enter existing classical laminar boundary layer theories for forced and natural convection are violated, such as the strict two-dimensionality of the dynamics or the stationarity. Finally the boundary layer dynamics at three different Prandtl number war compared, namely $Pr = 7, 0.7, 0.1$, $Ra = 3 \times 10^9$ and $\Gamma = 1$. This indicates, that with increasing Prandtl number dynamic rescaling improves the agreement with the Prandtl-Blasius-Pohlhausen theory. Thermal plume detachment seems to be the main driver of the deviation. With decreasing Prandtl number the thermal boundary layer thickness becomes thicker. The angle of the instantaneous large-scale circulation has fewer fluctuations for the larger Prandtl number. With decreasing Prandtl number the mean velocity amplitude of the large-scale circulation is found to increase.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Ziele der Arbeit	3
1.2	Gliederung	4
2	Grundlagen	5
2.1	Rayleigh-Bénard Konvektion und Boussinesq-Näherung	5
2.2	Laminare Grenzschichtmodelle	8
2.2.1	Erzwungene Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte	9
2.2.2	Natürliche Konvektion an einer horizontalen, beheizten Platte	13
3	Direkte Numerische Simulationen	16
3.1	Numerisches Modell	16
3.2	Auflösungskriterien	17
4	Grenzschichtanalyse bei Aspektverhältnis 1 und $Pr = 0.7$	21
4.1	Vertikale mittlere Profile aus der Zeitreihen-Analyse	21
4.2	Dynamisches Reskalieren	24
4.3	Zeitliche Fluktuation der Grenzschichtdicken	28
4.4	Schwankung der großskaligen Zirkulation in der Konvektionszelle	30
4.5	Logarithmische Temperaturprofile	32
5	Vergleich mit laminaren Grenzschichten der Mischkonvektion	35
5.1	Zweidimensionale Grenzschichtentheorie der Mischkonvektion	35
5.2	Grenzschichtdynamik in einem kleinen Beobachtungsfenster	39
6	Direkter Vergleich mit Zeitreihen aus den Experimenten im Ilmenauer Fass	48
6.1	Geschwindigkeitsfeld an der Zentrumslinie	48
6.2	Temperaturfeld an der Zentrumslinie	52

6.3	Skalierungsgesetze in der Grenzschicht	53
6.3.1	Viskose und thermische Grenzschichtdicken	53
6.3.2	Scher-Reynoldszahl	57
6.4	Grenzschichtanalyse an weiteren Messpositionen	59
7	Prandtlzahlabhängigkeit der Grenzschicht	64
7.1	Dynamisches Reskalieren für verschiedene Pr	64
7.2	Großskalige Zirkulation für verschiedene Pr	65
7.3	Grenzschichtdynamik in einem kleinen Beobachtungsfenster	66
7.4	Wirbelstruktur für verschiedene Pr	68
7.5	Temperaturfeld für verschiedene Pr	71
7.6	Lokale großskalige Zirkulation für verschiedene Pr	75
8	Zusammenfassung und Ausblick	78
8.1	Zusammenfassung	78
8.2	Ausblick	80
	Literaturverzeichnis	81
	Symbolverzeichnis	87
	Abbildungsverzeichnis	90
	Tabellenverzeichnis	93

1 Einleitung

Thermische Konvektion ist ein häufig anzutreffender Prozess in der Natur, z.B. in der äußeren Schicht der Sonne oder bei Luftbewegungen in der Atmosphäre. Ausgelöst durch Temperaturunterschiede ändert sich die Dichte der Luft in der Atmosphäre. Warme Luft steigt auf, während kalte Luft absinkt. Diese nennt man natürliche oder freie Konvektion. Gleichzeitig findet thermische Konvektion auch in vielen technischen Gebieten Anwendung, wie bei der Klimatisierung von Passagierkabinen und Räumen. Dabei nutzt man erzwungene oder gemischte Konvektion.

Rayleigh-Bénard Konvektion ist ein klassische Beispiel, um Eigenschaften thermischen Konvektion zu untersuchen. Als Rayleigh-Bénard Konvektion bezeichnet man die Strömung eines Fluids zwischen zwei horizontalen Platten, kreisförmiger oder rechteckiger Grundfläche, wobei die Temperatur an der oberen Platte niedriger ist als an der unteren. Ist die Temperaturdifferenz hinreichend groß, um Reibungskräfte zu überwinden, entsteht konvektive Bewegung. Im turbulenten Regime wird der größte Teil der Wärme nicht durch Diffusion durch die Flüssigkeitsschicht transportiert, sondern durch konvektiven Transport. Nur in der Nähe der oberen und unteren Platte, wo die Geschwindigkeiten aufgrund der Hafttrandbedingung klein sind, dominiert der diffusive Wärmetransport.

Der komplette Wärmetransport in einer turbulenten Konvektionszelle kann beschrieben werden durch die dimensionslose Nusseltzahl Nu , sie hängt ab von drei dimensionslosen Kontrollparametern der Rayleigh-Bénard Konvektion $Nu = f(Ra, Pr, \Gamma)$. Dies sind die Rayleighzahl Ra , die Prandtlzahl Pr und das Seitenverhältnis Γ der Konvektionszelle. Die Rayleighzahl Ra stellt ein Maß für den Temperaturunterschied in der Zelle und den Einfluss der Höhe der Zelle dar. Zum Beispiels ist die Rayleighzahl in der äußeren Schicht der Sonne ca. 10^{23} , in der Atmosphäre ca. 10^{18} , in klimatisierten Räumen ca. 10^{11} und in Passagierkabinen ca. 10^{10} . Die Prandtlzahl Pr beschreibt die Stoffeigenschaften des Fluids, beispielsweise ist sie für Quecksilber 0.0232, für Luft 0.7 und für Wasser 7.

Zwei theoretische Skalierungstheorien ergeben unterschiedliche Prognosen für den turbulenten Wärmetransport in Konvektion, sie basieren auf verschiedenen Annahmen der Struktur der Grenzschicht. Eine Theorie ist von Shraiman & Siggia (1990) bzw. Siggia (1994) und basiert auf einer turbulenten Grenzschicht mit einem logarithmischen Profil der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Das Transportge-

setz $Nu \sim Ra^{2/7} Pr^{-1/7}$ wird vorhergesagt. Die andere Theorie ist von Grossmann & Lohse (2000, 2002 bzw. 2004) und basiert auf einer laminaren Grenzschichten vom Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Typ (Prandtl 1904; Blasius 1908; Pohlhausen 1921). Das Transportgesetz $Nu \sim Ra^{1/4} Pr^{1/8}$ für $Pr \leq 1$ und $Nu \sim Ra^{1/4} Pr^{-1/12}$ für $Pr \geq 1$ wird vorhergesagt.

Wie bei allen Strömung an festen Wänden bilden sich Grenzschichten aus, hier für Temperatur und Geschwindigkeit. Die Messung der Struktur der Grenzschicht ist jedoch für hohe Rayleighzahlen in Laborversuchen von Konvektion schwierig. Der Grund ist, dass die Dicke der thermischen Grenzschicht δ_T abnimmt, wenn die Rayleigh- und Nusseltzahl wächst. Diese Dicke ist wie folgt gegeben

$$\delta_T = \frac{H}{2Nu}, \quad (1.1)$$

wobei H die Höhe der Konvektionszelle ist. Für eine Konvektionsströmung mit $Pr \sim \mathcal{O}(1)$ wird die entsprechende Geschwindigkeitsgrenzschicht eine ähnliche Dicke von $\delta_v \sim \delta_T$ haben, und wird somit in ähnlicher Weise mit zunehmender Rayleighzahl (siehe z. B. Shishkina et al. 2010) abnehmen. Detaillierte Messungen der Grenzschichtprofile bei höheren Rayleighzahlen ($Ra > 10^9$) erfordern somit große Experimente, wie zum Beispiel das Ilmenau-Fass für die Konvektion mit Luft (du Puits et al. 2007a; du Puits, Resagk & Thess 2010) oder eine hohe Auflösung wie Particle Image Velocimetry, was zum Beispiel für Konvektion mit Wasser möglich ist (Sun, Cheung & Xia 2008; Zhou & Xia 2010a).

Die Struktur dieser Grenzschichten erweist sich als entscheidend für ein tiefes Verständnis der lokalen und globalen Transport-Prozesse, wie jüngst in einer Publikation (Ahlers, Grossmann & Lohse 2009b) diskutiert wurde. Darüber hinaus gibt es ein Zusammenwirken von Grenzschichten mit großskaligen Zirkulationen (large-scale circulations), die immer in einer geschlossenen turbulenten Konvektionszelle vorhanden sind. Auf der einen Seite wird die großskalige Zirkulation durch eine Vielzahl thermischer Plumes ausgelöst (Fragmente der thermischen Grenzschicht, die sich zufällig nahe der oberen und unteren Platte in die Mitte der Zelle ablösen). Auf der anderen Seite kann die vollständig entwickelte großskalige Zirkulation, mit komplexer dreidimensionaler Dynamik, die Laminar-Flow-Dynamik nahe der Wände beeinflussen und teilweise sogar antreiben. Diese Wechselwirkungen sind noch nicht im Detail für zylindrische Konvektionszellen erforscht und bilden die zentrale Motivation für die vorliegende Arbeit.

Die Arbeit befasst sich zu Beginn mit der Analyse der Grenzschicht in Rayleigh-Bénard Konvektion. Dabei werden das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld in der Grenzschicht, die großskaligen Zirkulationen, thermische Grenzschichtdicke und Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke untersucht. Hierbei werden die Annahmen der klassischen laminaren Grenzschichttheorie für die zylindrische turbulente Rayleigh-Bénard Konvektionszelle überprüft. Anschließend werden die Grenzschichtprofile der direkten numerischen Simulationen (DNS) mit den Messwerte vom Ilmenauer Fass von Li et al. (2012) in

turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion mit Luft verglichen. Schließlich wird die Grenzschichtdynamik bei unterschiedlichen Prandtlzahlen analysiert.

1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

In dieser Arbeit werden die Grenzschichtstruktur und die Kopplung zwischen Grenzschichtdynamik und großskaliger Zirkulation für $Ra > 10^9$ mittels dreidimensionaler direkter numerischer Simulationen (DNS) untersucht. Um die physikalischen Ursachen für die Abweichungen der Grenzschichtprofile von der klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösung besser zu verstehen, werden vier langzeit DNS turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion in einer zylindrischen Zelle bei einem Seitenverhältnis $\Gamma = 1$ durchgeführt. Schritt für Schritt wird getestet, welche Annahmen der ursprünglichen Herleitung der Ähnlichkeitslösungen erfüllt sind oder nicht. Diese Untersuchungen umfassen Analysen der großskaligen Zirkulation, die Bedeutung der Verletzung von Zweidimensionalität der Strömung und die aktive Rolle der Temperatur bei isothermen Wänden. Die Kopplung zwischen der thermischen Grenzschicht und der Geschwindigkeitsgrenzschicht wird ebenfalls analysiert. Es wird gezeigt, dass tatsächlich viele der ursprünglichen Annahmen, die alle Grenzschichttheorien gemeinsam haben, in der vorliegenden zellulären Strömung nicht erfüllt sind. Weiterhin werden lokal gemessene turbulente Profile mit den Ergebnissen von Grenzschichten idealisierter Mischkonvektion verglichen.

Im Fokus der vorliegenden Dissertation “Numerische Untersuchung wandnaher Transport- und Strukturbildungsprozesse in turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion” steht die Untersuchung der Dynamik und Strukturbildungsprozesse in den Grenzschichten turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion im Rahmen von direkten numerischen Simulationen.

Die Zielstellung wird in die drei folgenden Fragestellungen zusammengefasst:

- Wie unterscheidet sich die Konvektionsgrenzschicht von der klassischen zweidimensionalen Strömungsgrenzschicht?
- Stimmen die mittleren Strömungs- und Temperaturprofile von DNS mit denen von Experimenten des Ilmenauer Fasses überein? Weichen die Profile von den klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen ab?
- Wie hängt die Grenzschichtdynamik von der Prandtlzahl ab? Verbessert das dynamische Reskalieren der Grenzschicht die Übereinstimmung mit der klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie?

Dabei variieren Rayleigh- und Prandtlzahl, um die kohärenten Strukturen und die Dynamiken in den Grenzschichten zu untersuchen.

1.2 Gliederung

Die Arbeit gliedert sich in folgende acht Kapitel.

Zu Beginn, im ersten Kapitel, wird eine Einführung in die Thematik, Motivation und Ziele der Arbeit gegeben.

Kapitel 2 erläutert Rayleigh-Bénard Konvektion und laminare Grenzschichtmodelle. Außerdem wird erzwungene und natürliche Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte erklärt.

Im darauf folgenden Kapitel 3 werden numerische Verfahren sowie Auflösungskriterien vorgestellt.

Kapitel 4 beinhaltet die Grenzschichtanalyse in einer zylindrischen Zelle. Zuerst werden die Grenzschichtprofile aus der klassischen Zeitreihenanalyse und aus dem dynamischen Reskalieren diskutiert. Anschließend werden großskalige Zirkulation (LSC) und die zeitlichen Änderungen der lokalen Grenzschichtstruktur behandelt.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der zweidimensionalen Grenzschichtentheorie der Mischkonvektion und der Dynamik in der Grenzschicht in einem kleinen Beobachtungsfenster. Die Untersuchungsergebnisse werden in Beziehung zu der Grenzschichttheorie gemischter Konvektion betrachtet.

Der Vergleich von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld zwischen Simulationen und Experimenten am Ilmenauer Fass steht im Mittelpunkt von Kapitel 6.

Das nächste Kapitel 7 beinhaltet die Prandtlzahlabhängigkeit der Grenzschicht. Für drei unterschiedliche Prandtlzahlen werden das dynamische Reskalieren, die großskalige Zirkulation, die Grenzschichtdynamik und das Temperaturfeld untersucht.

Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem kurzen Ausblick zukünftiger Untersuchungsmöglichkeiten.

2 Grundlagen

Zu Beginn dieses Kapitels wird erklärt, was man unter Rayleigh-Bénard-Konvektion versteht und worin die Boussinesq-Näherung entsteht. Im Anschluss daran werden die existierenden laminaren Grenzschichtmodelle erläutert. Hier handelt es sich um ein zweidimensionales Problem. Zuerst werden die Grenzschichtgleichungen in erzwungener Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte dargestellt. Dann wird beschrieben, wie diese Grenzschichtgleichungen von H. Blasius (1908) und Pohlhausen (1921) mit Hilfe von Ähnlichkeitsvariablen gelöst wurden. Danach werden die Grenzschichtdicke, der lokale Wärmestrom an der Platte und die Nusseltzahl ebenfalls kurz angesprochen. Schließlich wird die natürliche Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte analysiert. Die entsprechenden Grenzschichtgleichungen und Randbedingungen werden beschrieben. Anschließend wird die Lösungen dieser Grenzschichtgleichungen von Stewartson (1958) mittels Ähnlichkeitsvariable erklärt. Die Nusseltzahl wird kurz dargestellt. Die zweidimensionale Grenzschichtentheorie der Mischkonvektion wird in Kap. 5.1 erläutert.

2.1 Rayleigh-Bénard Konvektion und Boussinesq-Näherung

Der einfachste Fall einer Konvektionsströmung ist ein Fluid, welches durch zwei horizontale Platten begrenzt wird, wobei die obere Platte gekühlt und die untere Platte beheizt wird. Durch die Kühlung vergrößert sich die Dichte des Fluids in der Nähe der oberen Grenze, während sich durch das Heizen die Dichte des Fluids in der Nähe des unteren Randes verringert. Wenn die Temperaturdifferenz der beiden Platten hinreichend groß ist um Reibungskräfte zu überwinden, beginnt das Fluid sich zu bewegen, heiße Plumes steigen von unten nach oben und kalte Plumes fallen von oben nach unten. Dieses Phänomen von Fluidbewegung bezeichnet man als Rayleigh-Bénard Konvektion (RB Konvektion).

Henri Bénard untersuchte dieses Phänomen, indem er mit geschmolzenem Wachs in einer Metallpfanne, die von unten beheizt wurde, experimentierte. Ab einer bestimmten Temperatur beobachtete er hexagonale Strukturen in der Wachsschicht und an der freien Oberfläche. Dies waren die ersten systematischen Experimente, zur Untersuchung der Konvektion in einer dünnen Flüssigkeitsschicht, welche von unten beheizt war (Bénard 1900). Später stellte Lord Rayleigh die theoretische Grundlage zu Bénard's Arbeit

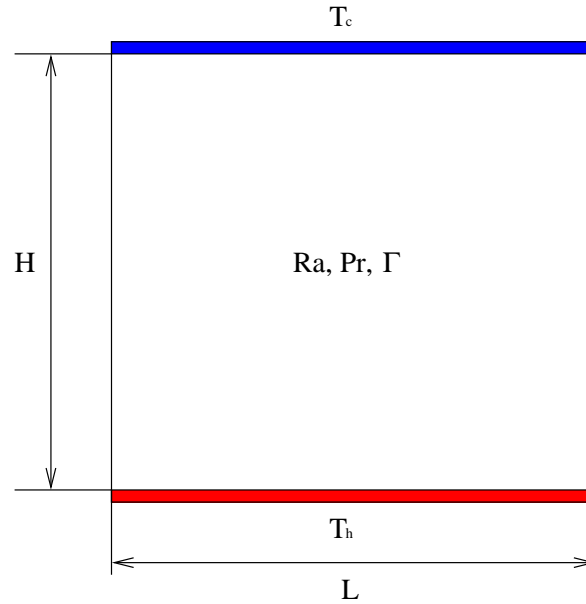


Abbildung 2.1: Skizze für Rayleigh-Bénard-Konvektion in einer Zelle der Höhe H und Länge L , wobei T_h die Temperatur an der Heizplatte und T_c die Temperatur an der Kühlplatte ist, es gilt $T_h > T_c$.

auf (Rayleigh 1916). Er behandelte das Problem im Rahmen einer Stabilitätstheorie und untersuchte die Konvektion von Fluiden, die zwischen zwei horizontalen Platten eingeschlossen waren.

Die Rayleigh-Bénard-Konvektion kann durch die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen in der Boussinesq-Näherung (Boussinesq 1903), in Kombination mit einer Advektions-Diffusions-Gleichung für das Temperaturfeld, beschrieben werden. In der Boussinesq-Näherung wird die Dichteveriation aufgrund der Temperaturdifferenz überall vernachlässigt, außer im Auftriebsterm. Es wird angenommen, dass die Dichte eine lineare Funktion der Temperatur ist. Die Dichte ist gegeben durch

$$\rho = \rho_0 \{1 - \alpha(T - T_0)\}. \quad (2.1)$$

Dabei ist ρ_0 die Dichte vom Fluid bei der Referenztemperatur T_0 . Die Referenztemperatur T_0 ist z.B. die Bulktemperatur in der Zelle.

Die Boussinesq-Gleichungen (Boussinesq 1903) für thermische Konvektion ergeben sich aus der Impuls-, Massen- und Energiebilanz und sind gegeben durch

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - g[1 - \alpha(T - T_0)]\delta_{iz}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}, \quad (2.4)$$

wobei $i, j = x, y, z$. Hier ist $p(x, y, z, t)$ der Druck, $u_i(x, y, z, t)$ das Geschwindigkeitsfeld, $T(x, y, z, t)$

das gesamte Temperaturfeld, ν die kinematische Viskosität, α der thermische Ausdehnungskoeffizient, g die Erdbeschleunigung und κ die Diffusivität der Temperatur.

Mit der Freifallgeschwindigkeit $U_f = \sqrt{g\alpha\Delta TH}$, der Höhe der Zelle H , der Freifallzeit $T_f = H/U_f$ und der Temperaturdifferenz $\Delta T = T_h - T_c$, wobei T_h die Temperatur an der Heizplatte und T_c die Temperatur an der Kühlplatte ist, erhält man die dimensionslosen Boussinesq-Gleichungen wie z.B. in Verzicco & Camussi (2003) beschrieben. Sie lauten:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \theta \delta_{iz}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{1}{\sqrt{PrRa}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2}, \quad (2.7)$$

wobei $i, j = x, y, z$. Hier ist u_i die dimensionslose Geschwindigkeit, p der dimensionslose kinematische Druck, $\theta = (T - T_c)/\Delta T$ die dimensionslose Temperatur. θ ist 1 an der heißen Platte und 0 an der Kühlplatte. Rayleigh-Bénard-Konvektion, wie in Abb. 2.1, kann durch drei wichtige dimensionslose Kontrollparameter beschrieben werden. Diese sind:

Die Rayleighzahl Ra stellt ein Maß für den Antrieb der Konvektion mittels Temperaturunterschied in der Zelle und den Einfluss der Höhe der Zelle dar und ist definiert als

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TH^3}{\nu\kappa}. \quad (2.8)$$

Die Prandtlzahl Pr ist ein Parameter, der sich aus den Stoffeigenschaften des Fluids ergibt:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.9)$$

Das Seitenverhältnis Γ ist ein Geometrieparameter der Zelle und beschreibt das Verhältnis von Breite L (bzw. Durchmesser d) zu Höhe H :

$$\Gamma = \frac{L}{H}. \quad (2.10)$$

Eine weitere wichtige dimensionslose Kennzahl für die Rayleigh-Bénard-Konvektion ist die Nusseltzahl Nu , mit der man den gesamten Wärmetransport beschreiben kann. Die Nusseltzahl setzt den konvektiven Wärmetransport zum konduktiven Wärmetransport in Beziehung. Sie ist wie folgt definiert

$$Nu = \frac{\langle u_z T \rangle_A - \kappa \frac{\partial \langle T \rangle_A}{\partial z}}{\kappa H^{-1} \Delta T}. \quad (2.11)$$

Hier $\langle \cdot \rangle_A$ zeigt eine Mittelwertbildung über einer horizontalen Ebene und wird angenommen, dass das die statistisch stationäre Regime ist.

Die meisten Untersuchungen in der Rayleigh-Bénard-Konvektion haben das Ziel, die genaue Beziehung zwischen dem Wärmetransport und den Kontrollparametern zu etablieren, wie

$$Nu = f(Ra, Pr, \Gamma). \quad (2.12)$$

Bei der Rayleigh-Bénard Konvektion bilden sich in der Nähe der oberen und unteren Platte Grenzschichten bzgl. T und \vec{u} aus. Die Grenzschicht ist eine dünne Schicht in der Nähe der Platte, wo die Reibungskräfte signifikant und gleich groß wie die Trägheitskräfte sind. Die Wärme aus den beiden Platten muss diese Grenzschichten durchdringen. Aus ihnen lösen sich die kalten und heißen Plumes ab. Darüber hinaus treibt eine großskalige Zirkulation, die in der gesamten Zelle und abhängig vom Seitenverhältnis der Konvektionszelle herrscht, die Grenzschichten. Um die Zusammenwirkung von Grenzschichten mit großskaliger Zirkulation in Detail zu erforschen, und um den lokalen und globalen Wärme- und Impulstransport zu besser verstehen, ist es wichtig, die Struktur der Grenzschichten zu untersuchen und zu analysieren.

Die thermischen Grenzschichtdicke δ_T ist wie folgt gegeben

$$\delta_T = \frac{H}{2Nu}, \quad (2.13)$$

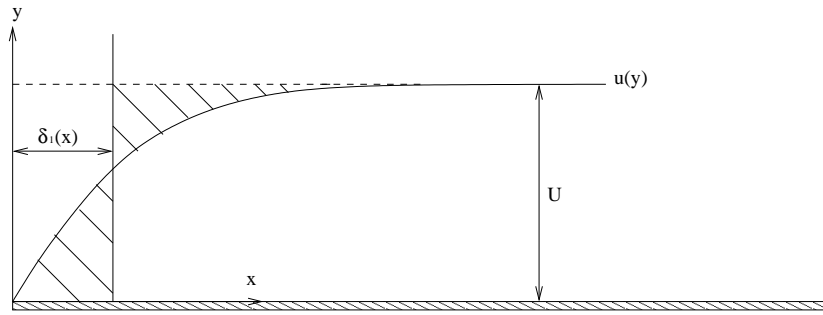
wobei H die Höhe der Konvektionszelle ist. Es ist zu sehen, wenn die Nusseltzahl zunimmt, sinkt die thermischen Grenzschichtdicke δ_T ab.

2.2 Laminare Grenzschichtmodelle

Grenzschichten werden in laminare und turbulente Grenzschichten unterteilt. In dieser Arbeit soll es vornehmlich um laminare Grenzschichten gehen. Für die Grenzschichtdicke von \vec{u} gibt es zwei Definitionen von Schlichting (1957). Eine Definition beschreibt die Grenzschichtdicke δ_{99} , welche eine Dicke darstellt, bei der die Strömungsgeschwindigkeit 99% der Außströmungsgeschwindigkeit erreicht. Die zweite Definition der Grenzschichtdicke ist die Verdrängungsdicke δ_1 der Grenzschicht. Sie ist definiert als

$$U\delta_1(x) = \int_0^\infty (U - u)dy. \quad (2.14)$$

In Abb. 2.2 lässt sich erkennen, dass die beiden schraffiert gezeichneten Flächen gleich groß sind. Die Verdrängungsdicke ist somit ein Maß für die Verschiebung der Stromlinien der Außenströmung, aufgrund der Reibung, nach außen.

Abbildung 2.2: Verdrängungsdicke δ_1 der Grenzschicht.

2.2.1 Erzwungene Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte

Unter erzwungener Konvektion versteht man, dass die Strömung von außen durch mechanische Kräfte z.B. durch eine Pumpe erzeugt wird. Hier wird die erzwungene Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte untersucht. Die Platte wird von einer stationären laminaren und räumlich konstanten Geschwindigkeit U_∞ angeströmt und von unten beheizt. In Abb. 2.3 ist die x-Achse entlang der Wand und die y-Achse senkrecht zur Wand. Bei $x = 0$ beginnt die ebene, sehr dünnwandige Platte und geht bis $x \rightarrow \infty$. Hier handelt es sich um das zweidimensionale Problem.

Aus den Gleichungen (2.2) - (2.4) ergeben sich die Grenzschichtgleichungen für stationäre zweidimensionale, inkompressible Strömungen.

Die Impulsgleichung in x-Richtung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.15)$$

Die Impulsgleichung in y-Richtung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - g[1 - \alpha(T - T_w)], \quad (2.16)$$

Die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.17)$$

Die Advektions-Diffusions-Gleichung für das Temperaturfeld:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.18)$$

Dabei ist u die Geschwindigkeit in x-Richtung, v die Geschwindigkeit in y-Richtung, T die Temperatur und T_w die Wandtemperatur.

Die Randbedingungen dieses zweidimensionalen Problems sind:

- $u = v = 0, T = T_w$ bei $y = 0$

- $u = U_\infty, T = T_\infty$ bei $y \rightarrow \infty$.

Es wird angenommen, dass $\frac{\partial p}{\partial x}|_{x=0} = 0$ ist, da $U_\infty = \text{const.}$

Um die Grenzschichtgleichungen zu vereinfachen, ist es notwendig abzuschätzen, welche Terme für die Grenzschicht vernachlässigbar sind. Deshalb werden die Gleichungen (2.15) - (2.18) dimensionslos gemacht mit:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U_\infty}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{U_\infty}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad \tilde{\theta} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}. \quad (2.19)$$

Die dimensionslose Grenzschichtgleichungen sind

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\nu}{U_\infty L} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (2.20)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\nu}{U_\infty L} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \frac{gL}{U_\infty^2} + g\alpha \tilde{\theta} (T_\infty - T_w) \frac{L}{U_\infty^2}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (2.22)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\kappa}{U_\infty L} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} \right). \quad (2.23)$$

mit

$$\frac{U_\infty L}{\nu} = Re, \quad \frac{U_\infty L}{\kappa} = \frac{U_\infty L}{\nu} \frac{\nu}{\kappa} = Re Pr. \quad (2.24)$$

Hier haben \tilde{u} und \tilde{x} die Größenordnung $\mathcal{O}(1)$. \tilde{v} und \tilde{y} haben die Größenordnung $\mathcal{O}(\delta)$. Es wird alle Terme vernachlässigt, die von der Größenordnung $\mathcal{O}(\delta)$ oder $\mathcal{O}(\delta^2)$ sind. Dann erhält man die Grenzschichtgleichungen in dimensionsbehafteter Form wie folgt

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.25)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.27)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.28)$$

mit obigen Randbedingungen.

Diese Gleichungen (2.25) - (2.27) wurden von H. Blasius (1908) wie folgt gelöst. Eine von Blasius eingeführte Ähnlichkeitsvariable η wird wie folgt definiert

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}}. \quad (2.29)$$

Weiterhin ist die dimensionslose Stromfunktion $f(\eta)$ gegeben durch

$$f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{2\nu x U_\infty}}, \quad (2.30)$$

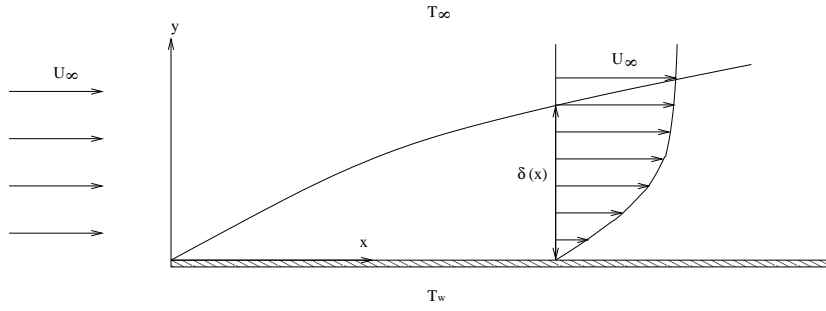


Abbildung 2.3: Skizze für die erzwungene Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte.

wobei $\psi(x, y)$ die Stromfunktion selbst ist. Mit diesem Ansatz ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten zu:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty f'(\eta), \quad (2.31)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{2x}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)). \quad (2.32)$$

Diese werden dann in die Gleichung (2.25) eingesetzt. Man erhält als Resultat die Blasius-Gleichung

$$f'''(\eta) + f''(\eta)f'(\eta) = 0, \quad (2.33)$$

mit den Randbedingungen: $f(0) = f'(0) = 0$ bei $\eta = 0$ und $f'(\infty) = 1$ bei $\eta \rightarrow \infty$.

Die Blasius-Gleichung ist eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung und wird numerisch gelöst, dabei wird η als Zeitvariable aufgefasst und $f''(0)$ geschätzt, damit die Lösung als Anfangswertproblem iterativ bis $f'(\infty) = 1$ berechnet werden kann.

Die Wandschubspannung folgt zu:

$$\tau_w(x) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_w = \rho \nu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} f''(0). \quad (2.34)$$

Die Blasius-Profile werden z.B. in Schlichting (1957) dargestellt. Aus diesen Profilen kann man ableiten, dass wenn die Strömungsgeschwindigkeit $u = 99\% U_\infty$ ist, η gleich 3.6 ist. Das heißt,

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} = 3.6 \quad (2.35)$$

Daraus ergibt sich die Grenzschichtdicke der Blasius-Grenzschicht $\delta_{99}(x)$ als

$$y = 3.6 \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} = \delta_{99}(x), \quad (2.36)$$

d.h.

$$\delta_{99}(x) \approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}, \quad (2.37)$$

Damit erhält man

$$\frac{\delta_{99}(x)}{x} \approx 5.0 \frac{1}{\sqrt{Re_x}}, \quad (2.38)$$

mit der Reynoldszahl

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}. \quad (2.39)$$

Die andere Dicke der Grenzschicht ist die Verdrängungsdicke δ_1 von Schlichting (1957). Sie ist gegeben durch

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy. \quad (2.40)$$

Mit $\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta)$ aus der Gleichung (2.31) ist

$$\delta_1(x) = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty (1 - f'(\eta)) d\eta = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (2.41)$$

Aus den Gleichungen (2.37) und (2.41) ist deutlich zu sehen, dass die Verdrängungsdicke δ_1 ungefähr ein Drittel der Grenzschichtdicke δ_{99} beträgt. Die Gleichung (2.28) wurde hingegen von Pohlhausen (1921) mittels Ähnlichkeitstransformation bei bekannter Blasiuslösung gelöst. Die Ähnlichkeitsvariable χ ist definiert als

$$\chi(\eta) = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}. \quad (2.42)$$

Daraus ergibt sich die Temperatur zu

$$T = \chi(\eta)(T_\infty - T_w) + T_w. \quad (2.43)$$

Setzt man nun diese Temperatur und die Stromfunktion in die Gleichung (2.28) ein, erhält man die sogenannte Pohlhausen-Gleichung

$$\chi''(\eta) + \frac{\nu}{\kappa} f(\eta) \chi'(\eta) = 0, \quad (2.44)$$

mit $Pr = \nu/\kappa$ und

$$\chi''(\eta) + Pr f(\eta) \chi'(\eta) = 0. \quad (2.45)$$

Die dazugehörigen Randbedingungen sind: $\chi(0) = 0$ bei $\eta = 0$ und $\chi(\infty) = 1$ bei $\eta \rightarrow \infty$.

Für die Gleichung (2.45) ist $f(\eta)$ ja bereits bekannt, weil $f'(\eta)$ von der Blasius-Lösung bekannt ist. η ist definiert wie vorher. Unter Nutzung der Blasius-Gleichung kann $\chi(\eta)$ vereinfacht werden. Die Pohlhausen-Lösung ist:

$$\chi(\eta) = A(Pr) \int_0^\eta \left[\frac{f''(\eta')}{f''(0)} \right]^{Pr} d\eta'. \quad (2.46)$$

Wobei $A(Pr)$ eine stoffabhängige Normierungskonstante darstellt, beispielsweise $A(0.7) = 0.585$ für Luft, bzw. $A(7.0) = 1.29$ für Wasser.

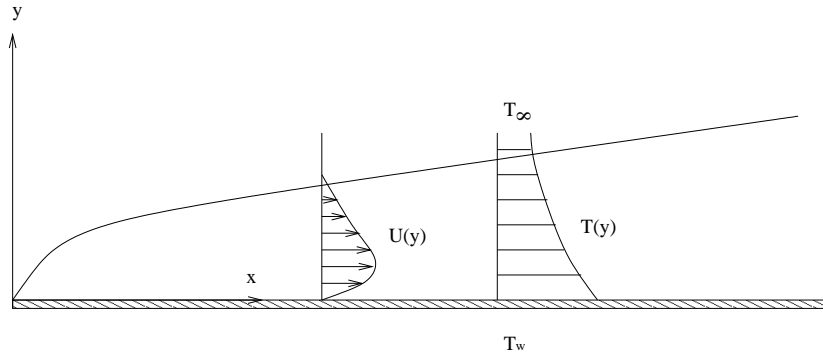


Abbildung 2.4: Skizze für natürliche Konvektion an einer horizontalen, beheizten Platte.

Der lokale Wärmestrom an der Platte berechnet sich zu

$$\dot{Q}(x) = \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w = \kappa \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} (T_\infty - T_w) A(Pr). \quad (2.47)$$

Dann erhält man die Wärmeübergangskoeffizient α

$$\alpha = \frac{\dot{Q}(x)}{T_w - T_\infty} = -\kappa \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} A(Pr). \quad (2.48)$$

Die Nusseltzahl Nu folgt zu:

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\kappa} = -\sqrt{\frac{U_\infty x}{2\nu}} A(Pr) = -\sqrt{\frac{Re_x}{2}} A(Pr). \quad (2.49)$$

Die Pohlhausen-Lösung beinhaltet keine Modifikationen der Grenzschicht durch Auftriebseffekte. Das Temperaturfeld ist passiv.

2.2.2 Natürliche Konvektion an einer horizontalen, beheizten Platte

Bei der natürlichen Konvektion wird die Strömung durch Temperaturdifferenzen, die Dichteunterschiede verursachen, erzeugt. Hier wird die natürliche Konvektion an einer horizontalen Platte untersucht. Die Platte wird von unten beheizt. Hier handelt es sich um das zweidimensionale Problem.

In Abb. 2.4 ist die Wandtemperatur T_w größer als die Umgebungstemperatur T_∞ . Mit Abnahme der Temperatur in y-Richtung nimmt die Dichte des Fluides zu. Dann fällt der Druck in die Grenzschicht. Dadurch entsteht ein induzierter Druckgradient in x-Richtung. Das ist die Ursache für die Grenzschichtströmung an der horizontalen, beheizten Platte. Stewartson (1958) hat zuerst die freie Konvektion an einer horizontalen Platte mit $T_w > T_\infty$ nach den Methoden der Grenzschichttheorie untersucht.

Die Grenzschichtgleichungen in dimensionsbehafteter Form sind wie folgt

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.50)$$

$$-\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial y} + g\alpha_\infty(T - T_\infty) = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.52)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa_\infty \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.53)$$

Dabei ist u die Geschwindigkeit in x -Richtung, v die Geschwindigkeit in y -Richtung, T die Temperatur, ρ_∞ die Dichte des Fluides in der Umgebung, ν_∞ die kinematische Viskosität in der Umgebung, α_∞ der thermische Ausdehnungskoeffizient in der Umgebung und κ_∞ die Diffusivität der Umgebungstemperatur.

Die Randbedingungen dieses zweidimensionalen Problems sind:

- $u = v = 0, T = T_w$ bei $y = 0$
- $u = 0, T = T_\infty$ bei $y \rightarrow \infty$.

Diese Gleichungen (2.50) - (2.53) wurden von Stewartson (1958) wie folgt gelöst. Eine von Stewartson eingeführte Ähnlichkeitsvariable η wird wie folgt definiert

$$\eta = \frac{y}{x^{2/5}} \left(\frac{g\alpha_\infty(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right)^{1/5}. \quad (2.54)$$

Weiterhin ist die dimensionslose Stromfunktion $f(\eta)$ gegeben durch

$$f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\sqrt[5]{\nu^3 g \alpha_\infty (T_w - T_\infty) x^3}}, \quad (2.55)$$

wobei $\psi(x, y)$ die Stromfunktion selbst ist. Mit diesem Ansatz ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten zu:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt[5]{\nu g^2 \alpha_\infty^2 (T_w - T_\infty)^2 x} f'(\eta), \quad (2.56)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{5x} \sqrt[5]{\nu^3 g \alpha_\infty (T_w - T_\infty) x^3} (\eta f'(\eta) - f(\eta)). \quad (2.57)$$

Die Ähnlichkeitsvariable χ ist definiert als

$$\chi(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}. \quad (2.58)$$

Daraus ergibt sich die Temperatur zu

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty) \chi(\eta). \quad (2.59)$$

Die Ähnlichkeitsvariable k ist definiert als

$$k(\eta) = \frac{P}{[\nu g^2 \alpha_\infty^2 (T_w - T_\infty)^2 x]^{2/5}}. \quad (2.60)$$

Daraus ergibt sich der Druck zu

$$P = [\nu g^2 \alpha_\infty^2 (T_w - T_\infty)^2 x]^{2/5} k(\eta). \quad (2.61)$$

Diese werden dann in die Gleichungen (2.50) - (2.53) eingesetzt. Man erhält

$$f''' + \frac{3}{5} f'' f - \frac{1}{5} f' f' - \frac{2}{5} k + \frac{2}{5} \eta k' = 0, \quad (2.62)$$

$$k' = \chi, \quad (2.63)$$

$$\chi'' + \frac{3Pr}{5} f \chi' = 0. \quad (2.64)$$

Mit den Randbedingungen:

- $f(0) = f'(0) = 0, \chi(0) = 1$ bei $\eta = 0$
- $f'(\infty) = \chi(\infty) = k(\infty) = 0$ bei $\eta \rightarrow \infty$.

Bei konvektivem Wärmeübergang ist der Wärmestrom an der Wand \dot{Q}_w wie folgende definiert:

$$\dot{Q}_w = \alpha (T_w - T_\infty), \quad (2.65)$$

Die Nusseltzahl Nu folgt für die Luft von Schlichting (1957) zu:

$$Nu_x = \frac{\dot{Q}_w x}{\lambda_\infty (T_w - T_\infty)} = 0.357 \left(\frac{x}{l}\right)^{-2/5} Gr_x^{1/5}. \quad (2.66)$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Fluides in der Umgebung ist.

3 Direkte Numerische Simulationen

In diesem Kapitel wird zu Beginn die genutzte numerische Methode, direkte numerische Simulationen (DNS), erläutert. Im Weiteren wird auf Auflösungskriterien eingegangen und überprüft, ob ein verfeinertes Grötzbach Kriterium für das gewählte numerische Verfahren ausreichend ist.

3.1 Numerisches Modell

Um das Ilmenauer Fass zu modellieren, wird eine zylindrische Zelle mit einer Heizplatte am unteren und einer Kühlplatte am oberen Ende in den DNS benutzt. Die Abb. 3.1 stellt die zylindrische Zelle dar. Das Rayleigh-Bénard Problem wird durch die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen in der Boussinesq-Approximation in Kombination mit einer Advektions-Diffusions-Gleichung für das Temperaturfeld beschrieben. Aufgrund der zylindrischen Geometrie werden die dimensionslosen Boussinesq-Gleichungen (2.5) - (2.7) von kartesischen Koordinaten zu zylindrischen Koordinaten $(x, y, z) \rightarrow (r, \phi, z)$ umgeschrieben. Hier wurden Simulationen mit $\Gamma = 1$, $Pr = 7, 0.7, 0.07$, $Ra = 3 \times 10^9$ sowie $\Gamma = 1$, $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^{10}$ durchgeführt.

Als Randbedingungen wird verwendet:

- Hafttrandbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld an allen Seitenwänden, d.h. $u_i \equiv 0$.
- Konstante Temperatur T_h und T_c auf den Boden- und Deckenplatten. Es gilt stets $T_h > T_c$.
- Adiabatische Seitenwände, d.h. $\frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R} = 0$.

Das genutzte DNS Verfahren wurde von Verzicco & Orlandi (1996) entwickelt und von M. S. Emran parallelisiert. Ihr Code ist hier weiter verwendet. Die Gleichungen werden auf einem versetzten Gitter mittels finiten Differenzenverfahrens zweiter Ordnung für die dreidimensionale zylindrischen Geometrie (Verzicco & Orlandi 1996; Verzicco & Camussi 2003) diskretisiert. Dabei sind die Temperatur und der Druck in der Mitte der Gitterzelle fixiert, und die Geschwindigkeiten in der Mitte der vier Flächen platziert. Die Abb. 3.2 stellt die Position der einzelnen Felder in einer dreidimensionalen Gitterzelle der versetzten Gitter dar.

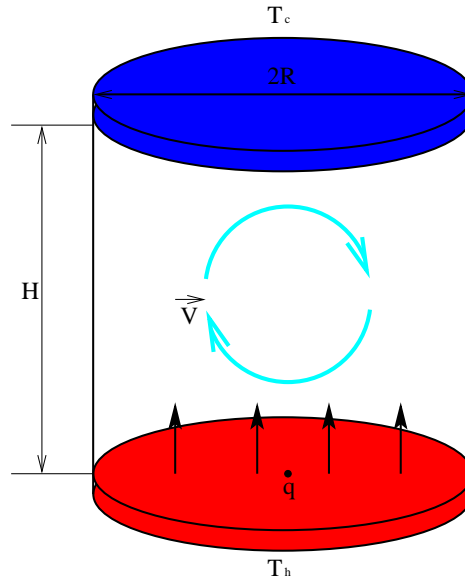


Abbildung 3.1: Skizze der zylindrischen Zelle der Rayleigh-Bénard-Konvektion. Die Randbedingungen sind: Hafttrandbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld an allen Seitenwänden, konstante Temperatur auf den Boden- und Deckenplatten, und adiabatische Seitenwände.

Die Gitterabstände sind nichtäquidistant in radialer und vertikaler Richtung. In vertikaler Richtung ähnelt das Gitter den Tschebycheff-Kollokationspunkten. Das heißt, je näher zur heißen und kalten Platten, desto kleiner ist der Gitterabstand in vertikaler Richtung. Die zeitliche Diskretisierung wird durch die so genannte “fractional-step method” von Kim & Moin (1985) durchgeführt. Mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens dritter Ordnung in Kombination mit einem Crank-Nicolson-Verfahren wird die zeitliche Integration wie Verzicco & Orlandi (1996) durchgeführt. Der Druck p wird durch einen zweidimensionalen Poisson-Löser nach vorheriger Anwendung einer eindimensionalen Fast Fourier Transform (FFT) in azimuthaler Richtung bestimmt.

3.2 Auflösungskriterien

Für ein Fluid mit $Pr \leq 1$ gibt die Kolmogorov-Länge η_K die Größenordnung der kleinsten Strukturen einer turbulenten Strömung an. Sie ist definiert als (Pope 2000)

$$\eta_K = \frac{\nu^{3/4}}{\langle \epsilon \rangle^{1/4}}. \quad (3.1)$$

Hierbei ist $\langle \epsilon \rangle$ der Mittelwert der kinetischen Energiedissipationsrate (Pope 2000) und wird wie folgt berechnet

$$\epsilon(x, t) = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (3.2)$$

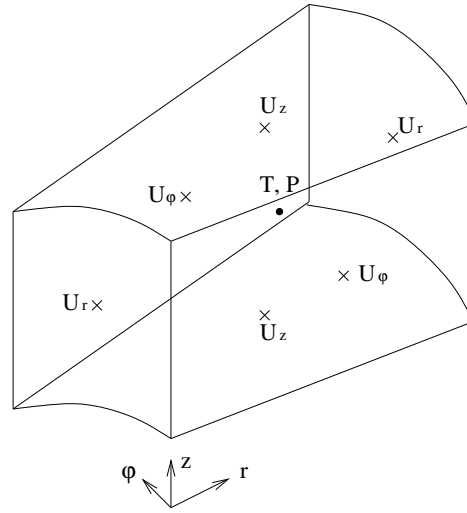


Abbildung 3.2: Position der einzelnen Felder in einer dreidimensionalen Gitterzelle der versetzten Gitter. Die Temperatur und der Druck lagern in der Mitte der Zelle. Die drei Geschwindigkeitskomponenten liegen in der Mitte der Flächen.

In unseren Simulationen ist die Gitterauflösung so gewählt, dass das Kriterium von Grötzbach (1983) in jeder Ebene erfüllt ist. Hierfür wird deshalb eine höhenabhängige Kolmogorov-Skala definiert als (Bailon-Cuba et al. 2010)

$$\eta_K(z) = \frac{\nu^{3/4}}{\langle \epsilon(z) \rangle_{A,t}^{1/4}}, \quad (3.3)$$

$\langle \cdot \rangle_{A,t}$ bezeichnet ein zeitliches Mittel (über eine Sammlung statistisch unabhängiger Momentaufnahmen) in den einzelnen horizontalen Ebenen. Als dimensionslose Kolmogorov-Skala $\tilde{\eta}_K$ berechnet sich zu

$$\tilde{\eta}_K(z) = \frac{\eta_K(z)}{H} = \frac{Pr^{3/8}}{Ra^{1/4}} \langle \tilde{\epsilon}(z) \rangle_{A,t}, \quad (3.4)$$

wobei $\tilde{\epsilon}(z)$ die dimensionslose kinetische Energiedissipationsrate ist und wie folgt berechnet wird

$$\tilde{\epsilon}(z) = \frac{\epsilon(z)}{H^2/(H/U_f)^3} = \frac{H\epsilon(z)}{U_f^3}. \quad (3.5)$$

Hierbei ist U_f die Freifallgeschwindigkeit $U_f = \sqrt{g\alpha\Delta TH}$ und H die Höhe der Zelle.

Für Fluide mit $Pr > 1$ hingegen gibt die Batchelor-Skala η_B die Größenordnung der kleinsten Skalen in einer turbulenten Strömung, sie wird mit folgender Formel bestimmt

$$\eta_B(z) = \frac{\eta_K(z)}{\sqrt{Pr}}. \quad (3.6)$$

Analog zu oben ergibt sich die dimensionlose Batchelor-Skala $\tilde{\eta}_B$ als

$$\tilde{\eta}_B(z) = \frac{\eta_B(z)}{H} = \frac{Pr^{-1/8}}{Ra^{1/4}} \langle \tilde{\epsilon}(z) \rangle_{A,t}. \quad (3.7)$$

Aus den Gleichungen (3.4) und (3.7) ist erkennbar, dass für kleine Prandtlzahlen die besagten Grössenordnungen stärker von der Prandtlzahl abhängt als bei grossen Prandtlzahlen. Folglich muss die Gitterauflösung der DNS für kleine Prandtlzahlen immer feiner werden.

Das ursprüngliche Auflösungskriterium von Grötzbachs (1983) lautet

$$\frac{\Delta}{\eta_K} \leq \pi, \quad (3.8)$$

wobei Δ ist das globale geometrische Mittel des Gitterabstands.

Wie in Emran & Schumacher (2008) und Bailon-Cuba et al. (2010) wird im zylindrischen Koordinatensystem Δ zu $\tilde{\Delta}(z)$ ersetzt, daß wie folgt definiert ist,

$$\tilde{\Delta}(z) = \max_{\Delta_r, \Delta_z} [\sqrt[3]{r \Delta_\phi \Delta_r(z) \Delta_z(z)}]. \quad (3.9)$$

$\tilde{\Delta}(z)$ ist folglich das Maximum des geometrischen Mittel des Gitterabstands in der Höhe z und Δ_ϕ , Δ_r , Δ_z sind die Gitterabstände in azimuthaler, radialer und axialer Richtung. Damit erhält man das verfeinerte Grötzbach Kriterium

$$\frac{\tilde{\Delta}(z)}{\eta_K(z)} \leq \pi. \quad (3.10)$$

In Tabelle 3.1 listet Gitterauflösungen für unterschiedliche Simulationen mit verschiedenen Prandtl- und Rayleighzahlen sowie die zugehörigen Nusseltzahlen.

Ra	Pr	$N_\phi \times N_r \times N_z$	$Nu \pm \sigma$	σ in %	N_{BL}
3×10^{10}	0.7	$1153 \times 513 \times 861$	189.65 ± 1.5	0.8	23
3×10^9	0.7	$513 \times 301 \times 360$	90.32 ± 0.63	0.7	18
3×10^9	7	$601 \times 321 \times 441$	90.77 ± 0.45	0.5	15
3×10^9	0.1	$1153 \times 513 \times 1025$	71.39 ± 0.28	0.4	23

Tabelle 3.1: Gitterauflösungen für unterschiedliche Prandtl- und Rayleighzahlen. N_ϕ , N_r und N_z sind die Anzahl von Gitterpunkten in azimuthaler, radialer und axialer Richtung. N_{BL} ist die Anzahl der Gitterebenen in der thermischen Grenzschicht. Das Seitenverhältnis ist $\Gamma = 1$.

Die thermische Grenzschicht wird mit 23 Gitterebenen für $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^{10}$ und mit 18, 15 bzw. 23 Gitterebenen für $Pr = 0.7, 7, 0.1$, $Ra = 3 \times 10^9$ aufgelöst. Ein in letzter Zeit diskutiertes Auflösungskriterium von Shishkina et al. (2010) für $Pr \approx 0.7$ lautet

$$N_{th.BI} \approx 0.35 Ra^{0.15}, \quad 10^6 \leq Ra \leq 10^{10}. \quad (3.11)$$

$N_{th.BI}$ ist die minimale Anzahl der Gitterebenen in der thermischen Grenzschicht. Mit diesem Auflösungskriterium von Shishkina et al. (2010) ergibt 9 und 13 Gitterebenen für die thermische Grenzschicht in

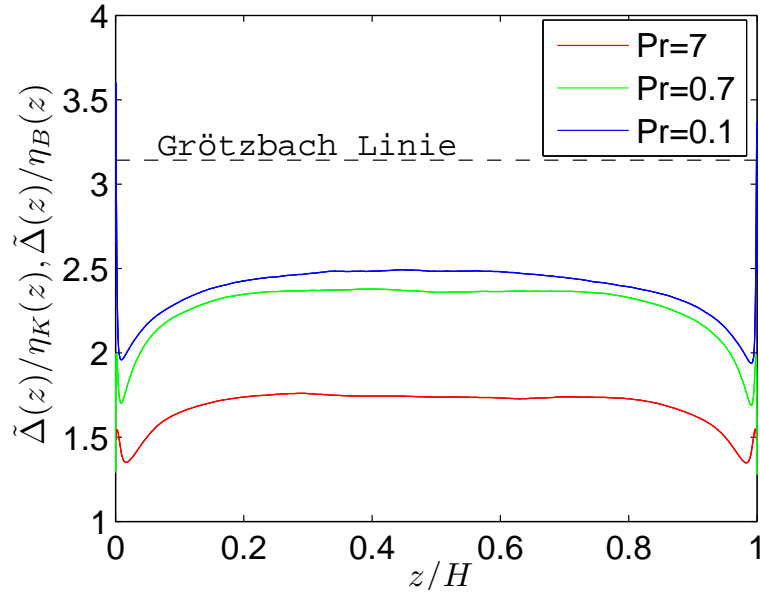


Abbildung 3.3: Verhältnis zwischen dem maximalen geometrischen mittleren Gitterabstand $\tilde{\Delta}(z)$ und die Kolmogorov-Skala $\eta_K(z)$ bzw. die Batchelor-Skala $\eta_B(z)$ für drei unterschiedliche Prandtlzahlen mit $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Die horizontale schwarze Linie zeigt das originale Auflösungskriterium von Grötzbach.

beiden Fällen. Es ist hier anzumerken, dass dieses Auflösungskriterium auf der laminaren Blasiusgrenzschicht beruht.

Die resultierte Nusseltzahl für $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^{10}$ ist $Nu = 189.65 \pm 1.5$, mit einer Standardabweichung von 0.8%. Bei $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^9$ ist die Nusseltzahl $Nu = 90.32 \pm 0.63$ mit einer Standardabweichung von 0.7%. Bei $Pr = 7$, $Ra = 3 \times 10^9$ ist die Nusseltzahl $Nu = 90.77 \pm 0.45$ mit einer Standardabweichung von 0.5%. Bei $Pr = 0.1$, $Ra = 3 \times 10^9$ ist die Nusseltzahl $Nu = 71.39 \pm 0.28$ mit einer Standardabweichung von 0.4%. Die Standardabweichung wird in der gleichen Weise wie von Bailon-Cuba et al. (2010) bestimmt. Hier wird die Nusseltzahl Ebene für Ebene genommen und die Fluktuation über dem globalen Durchschnitt bestimmt.

Die Abb. 3.3 zeigt das Verhältnis von $\tilde{\Delta}(z)/\eta_K(z)$ und $\tilde{\Delta}(z)/\eta_B(z)$ über die ganze Zelle für drei verschiedene Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Es lässt sich beobachten, dass das Verhältnis nahe der oberen und unteren Platte variiert und im mittleren Bereich flach bleibt. Die rote Linie für $Pr = 7$ und die grüne Linien für $Pr = 0.7$ übersteigen nicht das originale Auflösungskriterium von Grötzbach. Aber die blaue Linie für $Pr = 0.1$ am Anfang und am Ende der Zelle ist höher als die Grötzbach Linie. Hier kann man das vernachlässigen.

4 Grenzschichtanalyse bei Aspektverhältnis 1 und $Pr = 0.7$

Im folgenden Kapitel werden anfangs die vertikalen mittleren Profile aus den Zeitreihen analysiert. Hier wurden die eindimensionalen mittleren Profile der horizontalen Geschwindigkeiten, der vertikalen Geschwindigkeitskomponenten und der normierten Temperaturen der oberen Platte bei unterschiedlichen Messstellen für $Ra = 3 \times 10^9$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$ berechnet. Diese Profile wurden mit den klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen verglichen. Dann wurde die fluktuierenden Grenzschichtdicken dynamisch reskaliert. Diese dynamischen reskalierten mittleren Geschwindigkeits- und Temperaturprofile weichen immer noch von den klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen ab. Anschließend wurden die Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit und die thermische Grenzschichtdicke der Zeitreihen bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$ analysiert. Diese beiden Grenzschichtdicken schwanken stark. Schließlich wurden die Schwankungen der großskaligen Zirkulation in der Konvektionszelle untersucht.

4.1 Vertikale mittlere Profile aus der Zeitreihen-Analyse

Die einfachste Methode zur Analyse, welche in den meisten Laborexperimenten benutzt wird, ist die, die Zeitreihen der turbulenten Felder entlang eindimensionaler Felder von Proben zu nehmen. Das heißt, die Zeitreihe besteht aus drei Geschwindigkeitskomponenten und einer Temperatur an einem bestimmten Punkt (r, ϕ, z) in der Zelle, dann werden die zeitlichen Mittelwerte berechnet und die Messung für verschiedene Höhen von z wiederholt. Das Ergebnis dieses Verfahrens sind Mittelwerte von Temperatur oder Geschwindigkeit. In den direkten numerischen Simulationen werden solche Zeitreihen gleichzeitig berechnet. Für $Ra = 3 \times 10^9$ gibt es vier Felder von je 40 Proben an den Gitterpositionen der vertikalen Koordinate z , ab $z = H$. Sie wurden in die Zelle platziert, um die vollständig aufgelösten Zeitreihen der drei Geschwindigkeitskomponenten u_r, u_ϕ, u_z und die Temperaturprofile zu verfolgen. Probenfeld 1 befindet sich in der Mittellinie. Probenfelder 2, 3 und 4 liegen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 0.88R$ und $\phi = 0, \pi/2$ und π , siehe Abb. 4.1(a). Das entspricht den Positionen der Experimente im Ilmenauer Fass. Für $Ra = 3 \times 10^{10}$ wurden 4×100 Proben genommen. Die eindimensionalen mittleren

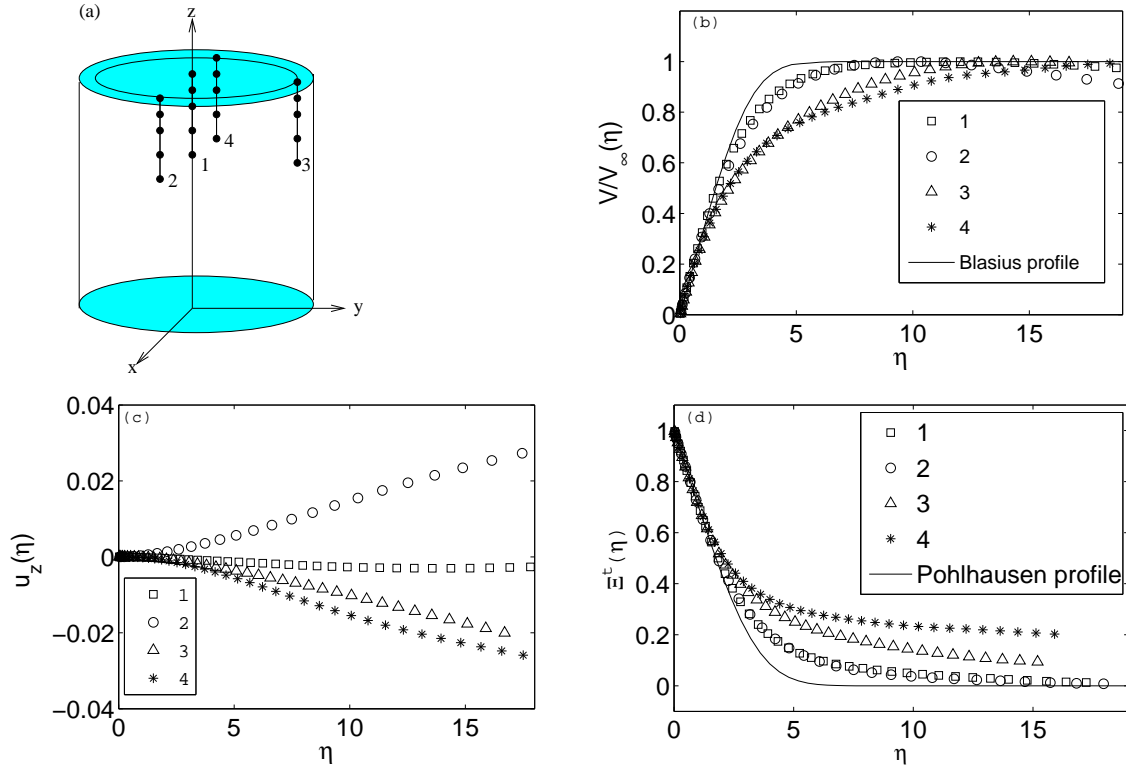


Abbildung 4.1: Mittlere Profile der Geschwindigkeit und der Temperatur bei $Ra = 3 \times 10^9$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$. (a) Skizze der vier Probenfelder mit Messstellen. Probenfeld 1 ist montiert bei $(r, \phi) = (0, 0)$, Probenfeld 2 bei $(0.88R, 0)$, Probenfeld 3 bei $(0.88R, \pi/2)$ und Probenfeld 4 bei $(0.88R, \pi)$. (b) Mittleres Profil der horizontalen Geschwindigkeit $V(\eta)$ für vier Probenfelder. Die durchgezogene Linie entspricht der klassischen Prandtl-Blasius-Lösung von Schlichting (1957). (c) Mittleres Profil der vertikalen Geschwindigkeitskomponente $u_z(\eta)$ für vier Probenfelder. (d) Mittleres Profil der normierten Temperatur $\Xi^t(\eta)$ von der oberen Platte für vier Probenfelder. Die durchgezogene Linie entspricht der klassischen Pohlhausen-Lösung von Schlichting (1957). Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

Profile für die horizontale Geschwindigkeit V ist wie bei du Puits et al. (2007) definiert als

$$V(r, \phi, z, t) = \sqrt{u_r^2(r, \phi, z, t) + u_\phi^2(r, \phi, z, t)}, \quad (4.1)$$

und die normierten Temperaturen Ξ an den oberen und unteren Platten sind wie folgt definiert:

$$\Xi^t(r, \phi, z, t) = \frac{T(r, \phi, z, t) - T_{top}}{T(z = H/2) - T_{top}}, \quad (4.2)$$

$$\Xi^b(r, \phi, z, t) = \frac{T_{bottom} - T(r, \phi, z, t)}{T_{bottom} - T(z = H/2)}, \quad (4.3)$$

Hier wurden die eindimensionalen mittleren Profile der horizontalen Geschwindigkeit V , der vertikalen Geschwindigkeitskomponente u_z und der normierten Temperaturen Ξ^t von der oberen Platte verglichen. Die Abb. 4.1(a) zeigt die Skizze der vier Probenfelder mit Messstellen. In Abb. 4.1(b) sind die mittleren Profile der horizontalen Geschwindigkeit $V(\eta)$ für vier Probenfelder für $Ra = 3 \times 10^9$ dargestellt. Die Daten zu Probenfeld 1 ist als Rechteck dargestellt und die zu Probenfelder 2, 3, 4 als Kreise, Dreiecke

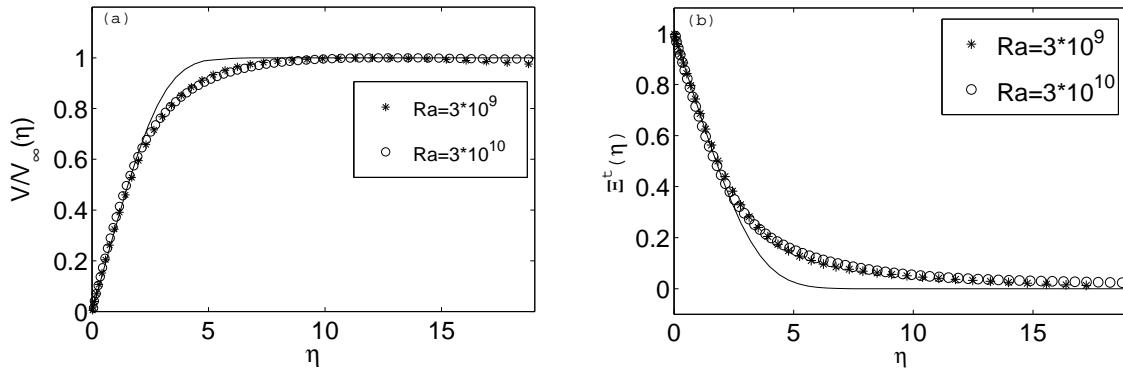


Abbildung 4.2: Mittlere Profile der Geschwindigkeit (a) und Temperatur (b) von Probenfeld 1 für zwei verschiedene Rayleighzahlen. Die Linien in den beiden Diagrammen entsprechen den klassischen Prandtl-Blasius- (a) und Pohlhausen-Lösungen (b). Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

und Sterne. Die durchgezogene Linie entspricht dem klassischen Prandtl-Blasius-Profil. Die Abb. 4.1(c) zeigt die mittleren Profile der vertikalen Geschwindigkeitskomponente $u_z(\eta)$ für vier Probenfelder für $Ra = 3 \times 10^9$. In Abb. 4.1(d) sind die mittleren Profile der normierten Temperatur $\Xi^t(\eta)$ von der oberen Platte für vier Probenfelder für $Ra = 3 \times 10^9$ dargestellt. Die durchgezogene Linie entspricht dem klassischen Pohlhausen-Profil. Die Blasius- und Pohlhausen-Profile kommen aus der Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie von Schlichting (1957) und η stellt die Ähnlichkeitsvariable dar.

Die Zeitreihe für jede Position der Probenfelder enthält ca. 57000 Datenpunkte für $Ra = 3 \times 10^9$ und ca. 23000 Datenpunkte für $Ra = 3 \times 10^{10}$. Das entspricht 122 Freifall-Zeiteinheiten für $Ra = 3 \times 10^9$ und 58 Freifall-Zeiteinheiten für $Ra = 3 \times 10^{10}$. In den Abb. 4.1 (b) & (d) ist zu sehen, dass die deutliche Abweichungen von den Blasius- und Pohlhausen-Profilen vorhanden sind. Das ist ähnlich wie bei den Laborversuchen von du Puits et al. (2007) und Zhou & Xia (2010). Darüber hinaus lassen sich signifikante Unterschiede zwischen den vier Profilen erkennen, welche durch die vorhandene mittlere Strömung in der Zelle verursacht werden. Die Profile in Abb. 4.1 (c) zeigen, dass die Strömung in den Probenfelder 3 und 4 im Bereich der mittleren Strömung nach unten verläuft, während sie im Probenfeld 2 im Bereich der mittleren Strömung aufwärts gerichtet ist. Hier ist auch deutlich zu sehen, dass die Daten der Probenfelder viel langsamer an das Blasius-Profil herankommen. Das heißt, dass die mittlere Strömung nach unten eine effiziente Erhöhung der Grenzschichtdicke verursacht.

Des weiteren sind auch die Daten für die beiden Rayleighzahlen an der Mittellinie verglichen worden. Die Abb. 4.2(a) zeigt die mittleren Profile der Geschwindigkeit von Probenfeld 1 für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$. Die Linie entspricht der klassischen Prandtl-Blasius-Lösung. Die Abb. 4.2(b) stellt die mittleren Profile der Temperatur von Probenfeld 1 für die beiden Rayleighzahlen dar. Diese Linie entspricht der klassischen Pohlhausen-Lösung. Es ist deutlich zu sehen, dass die Unterschiede zwischen

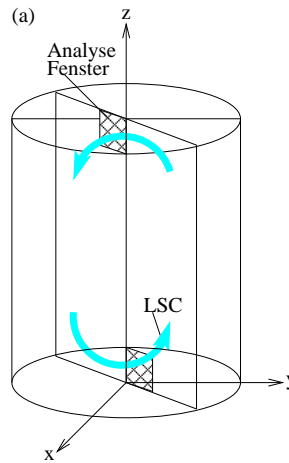


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des zweidimensionalen Analysefensters, das mit der instantanen großskaligen Zirkulation, der “Large-Scale Circulation” (LSC) ausgerichtet ist.

beiden Datensätzen sehr klein sind und die beiden Datensätze jedoch immer noch von den Blasius- und Pohlhausen-Profilen abweichen.

4.2 Dynamisches Reskalieren

Im nächsten Schritt folgen wir der Idee von Zhou & Xia (2010). Zhou & Xia (2010) haben ihr Konvektionsexperiment in einer schmalen rechteckigen Zelle durchgeführt und untersucht, ob ein so genanntes dynamisches Reskalieren der Grenzschicht dazu führt, dass die mittleren Profile näher an die Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen kommen. Sie haben die zeitabhängige relative vertikale Abstände $z^*(t)$ in Bezug auf die Grenzschichtdicke definiert (siehe Gl. (4.4)). Dann wurde das mittlere Geschwindigkeitsprofil $u^*(z^*)$ durch Mittelwerte von $u(z, t)$ in den gleichen relativen vertikalen Abstände z^* berechnet (siehe Gl. (4.5) - (4.7)). Zhou et al. (2011) haben gefunden, dass die Grenzschichtprofile in der Tat näher an die Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen im zentralen Teil der Zelle kommen.

Ähnlich wie beim Particle Image Velocimetry (PIV) im Experiment, wurden nun hier die Felder in einem kleinen planaren Fenster untersucht. Dieses Analysefenster ist in der Mitte der zylindrischen Zelle und ausgerichtet (siehe Abb. 4.3) für jeden Schnappschuss mit der entsprechenden instantanen großskaligen Zirkulation bei $z = \delta_T$. Diese momentane großskalige Zirkulationsrichtung ist durch den Winkel ϕ_{LSC} bestimmt. Der Winkel ϕ_{LSC} wird durch Gl. (4.9) definiert. Das Fenster hat eine Breite von $0.02R$, $0.1R$, oder $0.4R$ startend von der Mittellinie der Zelle. Um die Statistik zu verbessern, wurde diese Analyse an den oberen und unteren Platten unabhängig für jeden Schnappschuss durchgeführt. Dies bedeutet, dass die großskalige Zirkulationsrichtung an beiden Platten getrennt bestimmt wurde. Es ist bekannt, dass die großskalige Zirkulation eine etwas verdrehte Rollenform zeigt (Xi & Xia 2008).

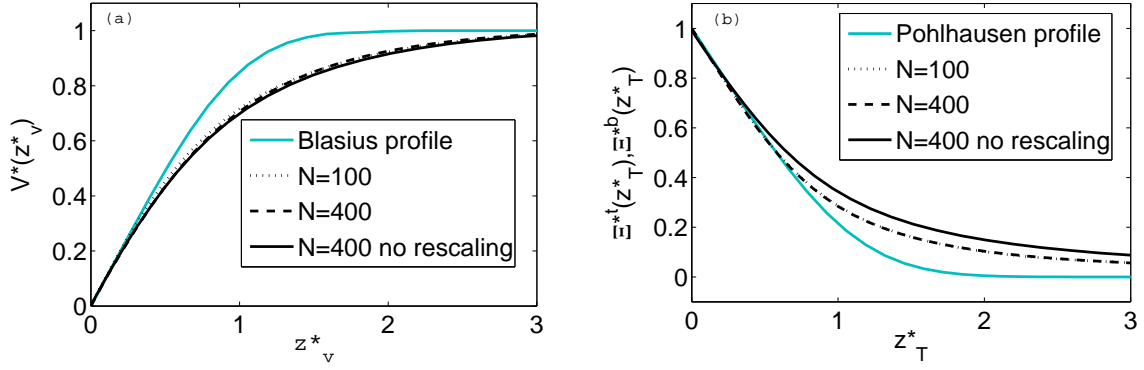


Abbildung 4.4: Dynamisches Reskalieren der mittleren Profile für $Ra = 3 \times 10^9$. (a) Dynamisch reskalierte mittlere Geschwindigkeitsprofile für eine unterschiedliche Anzahl von dreidimensionalen Schnappschüssen. Zum Vergleich sind das Blasius-Profil und das nicht reskalierte Profil hinzugefügt. (b) Dynamisch reskalierte mittlere Temperaturprofile der unteren und oberen Analysefenster für eine unterschiedliche Anzahl von dreidimensionalen Schnappschüssen. Dabei sind die Pohlhausen-Lösung und das mittlere Profil ohne Reskalierung ebenfalls dargestellt.

Die momentane Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit $\delta_v(t)$ wird als der Schnittpunkt der horizontalen Linie durch das erste lokalen Maximum des Geschwindigkeitsprofils und von der Tangente des Geschwindigkeitsprofils an den Platten bestimmt. Ähnlich ist die momentane thermische Grenzschichtdicke $\delta_T(t)$ definiert. Die vertikalen Abstände sind zu reskalieren mit

$$z_v^*(t) = \frac{z}{\delta_v(t)} \quad \text{und} \quad z_T^*(t) = \frac{z}{\delta_T(t)}. \quad (4.4)$$

Die resultierenden Geschwindigkeits- oder Temperaturprofile folgen durch (Zhou & Xia, 2010)

$$V^*(z_v^*) = \langle V(r, \phi_{LSC}, z, t) | z = z_v^* \delta_v(t) \rangle_r, \quad (4.5)$$

$$\Xi^*(z_T^*) = \langle \Xi(r, \phi_{LSC}, z, t) | z = z_T^* \delta_T(t) \rangle_r, \quad (4.6)$$

$$U_r^*(z_v^*) = \langle U_r(r, \phi_{LSC}, z, t) | z = z_v^* \delta_v(t) \rangle_r. \quad (4.7)$$

Hier $\langle \cdot \rangle_r$ zeigt eine Mittelwertbildung entlang r in der Ebene, die in ϕ_{LSC} ausgerichtet ist. Die reskalierte Temperatur Ξ wurde vom Deckel und Boden des Zylinders genommen.

In der Abb. 4.4(a) stellt die gepunktete Linie die dynamische Reskalierung der mittleren Geschwindigkeitsprofile für 100 Schnappschüsse bei $Ra = 3 \times 10^9$ dar. Die gestrichelte Linie zeigt die dynamische Reskalierung der mittleren Geschwindigkeitsprofile für 400 Schnappschüsse bei $Ra = 3 \times 10^9$. Die schwarze Linie ist das mittlere Geschwindigkeitsprofil ohne dynamische Reskalierung für 400 Schnappschüsse bei $Ra = 3 \times 10^9$. Die blaugrüne Linie ist das Prandtl-Blasius-Profil. Die beide dynamisch reskalierten Geschwindigkeitsprofile für 100 Schnappschüsse und für 400 Schnappschüsse liegen fast übereinander. Sie weichen deutlich von der Prandtl-Blasius-Lösung ab. Diese Abweichungen sind jedoch etwas geringer, als die vom Geschwindigkeitsprofil ohne dynamisches Reskalieren.

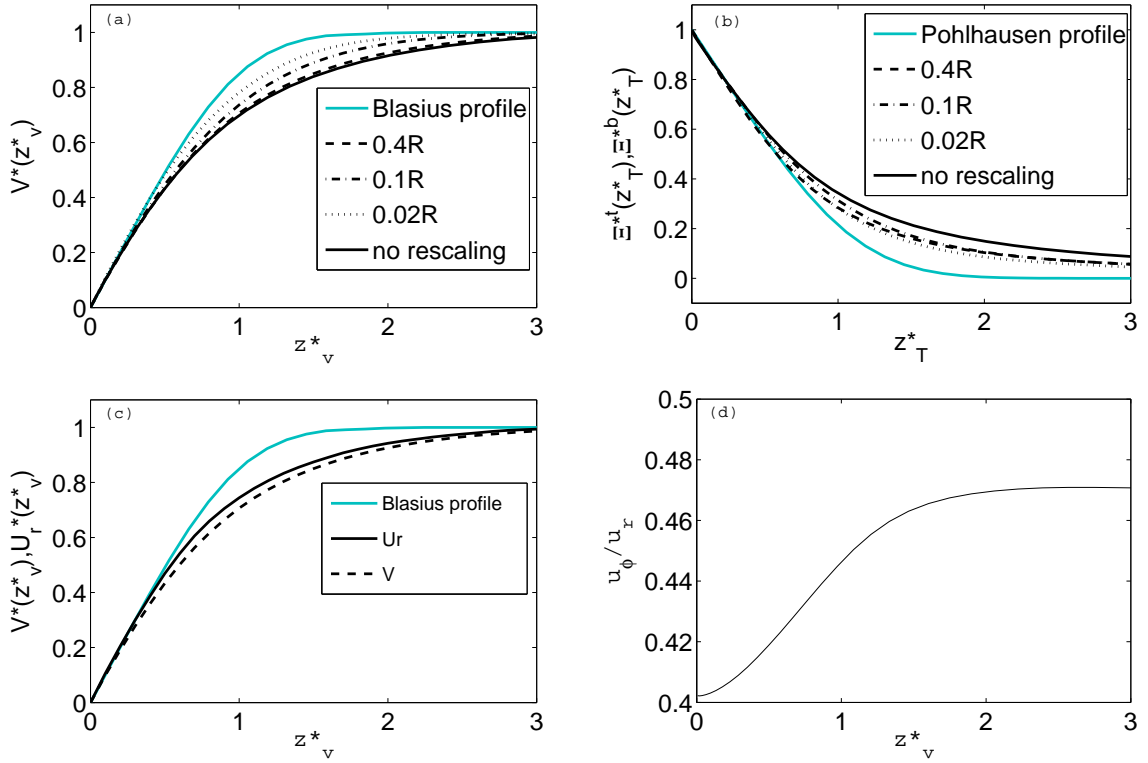


Abbildung 4.5: Dynamisches Reskalieren der mittleren Profile für $Ra = 3 \times 10^9$. (a) Dynamisch reskalierte mittlere Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Breiten des Fensters. Zum Vergleich sind das Blasius-Profil und das mittlere Profil ohne Reskalierung (Breite des Fensters: $0.4R$) hinzugefügt. (b) Dynamisch reskalierte mittlere Temperaturprofile für unterschiedliche Breiten des Fensters. Dabei sind die Pohlhausen-Lösung und das mittlere Profil ohne Reskalierung ebenfalls eingetragen. (c) Vergleich des Reskalierens von V^* mit U_r^* in der Ebene für ein Fenster mit einer Breite von $0.4R$. (d) Verhältnis u_ϕ/u_r der Geschwindigkeiten in der Ebene für ein Fenster mit einer Breite von $0.4R$. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

In der Abb. 4.4(b) sind die Profile der dazugehörigen Temperaturen eingetragen. Wieder liegen die reskalierten Profile (gestrichelt und gepunktet) dicht übereinander. Sie weichen deutlich von der Pohlhausen-Lösung ab. Diese Abweichungen sind jedoch nun viel kleiner als die vom Temperaturprofil ohne dynamische Reskalierung (schwarze Linie).

Im Gegensatz zu den Experimenten von Zhou & Xia (2010) und den zweidimensionalen DNS von Zhou et al. (2010, 2011) konnte die Übereinstimmung mit den Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Profilen im Vergleich zu den nicht dynamisch reskalierten Profilen nur geringfügig verbessert werden. In beiden Abbildungen werden die Profile für die unterschiedliche Anzahl von Schnappschüssen dargestellt. Es ist sehr deutlich zu sehen, dass die Abweichungen von den Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen bestehen bleiben.

In die Abb. 4.5(a) sind drei dynamisch reskalierte mittlere Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Breiten des Fensters für $Ra = 3 \times 10^9$ dargestellt. Auch hier wurde das nicht reskalierte mittlere Geschwindigkeitsprofil (schwarze Linie) und das Prandtl-Blasius-Profil (blaugrün) eingetragen. Es ist

zu sehen, dass die dynamisch reskalierten Geschwindigkeitsprofile mit abnehmender Breite des Fensters $0.4R$ bis $0.02R$ immer wenig von dem Prandtl-Blasius-Profil abweichen.

Die Abb. 4.5(b) zeigt die mittleren dynamischen reskalierten Temperaturprofile für unterschiedliche Breiten des Fensters für $Ra = 3 \times 10^9$. Die unterbrochenen Linien kennzeichnen die dynamisch reskalierten mittleren Temperaturprofile für die Breite des Fensters von $0.4R$, $0.1R$ und $0.02R$. Die schwarze Linie stellt das mittlere Temperaturprofil ohne dynamische Reskalierung für die Breite des Fensters von $0.4R$ dar. Die blaugrüne Linie ist das Pohlhausen-Profil. Es ist auch hier zu sehen, dass die Abweichungen der dynamisch reskalierten Temperaturprofile zum Pohlhausen-Profil erhalten bleiben. Diese werden durch die Plumeablösung verursacht, wie wir später im Detail untersuchen werden.

Im Gegensatz zu den Experimenten von Zhou & Xia (2010) und den zweidimensionalen DNS von Zhou et al. (2010, 2011), weichen die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile nach dem dynamischen Reskalieren immer noch von den Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Profilen ab. Das dynamische Reskalieren verringert die Abweichung zur klassischen Lösung. Mit abnehmender Breite des Fensters ist ebenfalls eine Verringerung der Abweichung bedingt zu beobachten. Eine bessere Übereinstimmung ist jedoch zu beobachten, wenn das Fenster so gewählt wird, dass es schmaler in radialer Ausrichtung ist. Eine Verschiebung des Fensters von der Mitte der Platte oder eine Kombination aus benachbarten Fenstern mit Winkeln um ϕ_{LSC} hat ebenfalls nicht zu einer besseren Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie geführt. Das gleiche gilt für Fenstergrößen kleiner als $0.02R$. Das heißt, dass in diesem Fall $0.02R$ ein Optimum für die untersuchten Datensätze ist.

Die Abb. 4.5(c) stellt den Vergleich des dynamischen Reskalierens von V^* mit U_r^* in dem Analysefenster mit einer Breite von $0.4R$ dar. Die Übereinstimmung mit dem Prandtl-Blasius-Profil wird verbessert, wenn die radiale Geschwindigkeitskomponente u_r anstelle der horizontalen Geschwindigkeit V verwendet wird, die in Gl. (4.1) definiert ist. Für kleinere Fenster ist jedoch die Übereinstimmung in Bezug auf V wieder besser als für u_r .

In Abb. 4.5(d) wird die Größe der Geschwindigkeit (u_r) in der Analyse Ebene mit der Geschwindigkeit (u_ϕ) senkrecht zur Ebene verglichen. Man kann sehen, dass das Verhältnis einen nicht vernachlässigbaren Wert im Gegensatz zu der zweidimensionalen und quasi-zweidimensionalen Situation besitzt. Ab der Höhe $z_v^* = 0.5$ beginnen sich die simulierten Profile von den theoretischen Profilen zu unterscheiden. Bei $z_v^* = 0.5$ ist das Verhältnis auf den Wert 0.42 gestiegen. Dies ist ein wichtiger Unterschied zu den zweidimensionalen DNS und den quasi-zweidimensionalen Messungen im Labor und ein erster Hinweis dafür, warum die Abweichungen von der Vorhersage der Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie in unserer Geometrie erhalten bleiben.

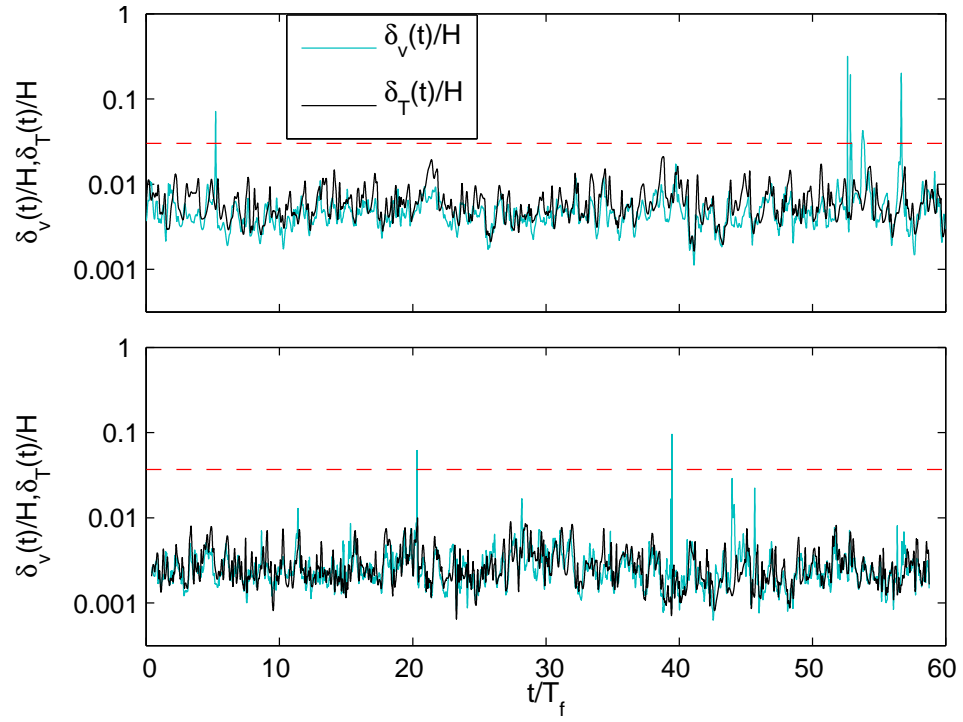


Abbildung 4.6: Fluktuation der momentanen Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit und der thermischen Grenzschichtdicke an der oberen Platte der Zelle. Oben ist für $Ra = 3 \times 10^9$ und unten für $Ra = 3 \times 10^{10}$. Die gestrichelte Linie in beiden Diagrammen bezeichnet das Ende des Probenfeldes 1, an dem die Daten für beide Ra getroffen werden. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

4.3 Zeitliche Fluktuation der Grenzschichtdicken

Im folgenden Kapitel werden die zeitlichen Fluktuationen der Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit und der thermischen Grenzschichtdicke der Zeitreihe am Probenfeld 1 untersucht. In Abb. 4.6 werden im oberen Diagramm die momentanen Grenzschichtdicken für Geschwindigkeit und Temperatur für $Ra = 3 \times 10^9$, und im unteren Diagramm für $Ra = 3 \times 10^{10}$ gezeigt. Dabei bilden die blaugrünen Linien die momentanen Grenzschichtdicken der Geschwindigkeit an der oberen Platte der Zelle von der Zeitreihe am Probenfeld 1 ab. Die schwarzen Linien zeigen die momentanen thermischen Grenzschichtdicken an der oberen Platte der Zelle. Die roten gestrichelten Linien bezeichnen das Ende des Probenfeldes 1, an dem die Daten für beide Rayleighzahlen getroffen werden. Die Geschwindigkeitsprofile wachsen sehr langsam von $z = 0$. Daher liegt der Schnittpunkt zwischen der tangentialen Linie bei $z = 0$ und der horizontalen Linie durch das erste lokale Maximum über dem Ende des Probenfeldes 1. Dieser Schnittpunkt kennzeichnet die Grenzschichtdicke. Da dieser Punkt für das abgebildete Probenfeld sich ausserhalb der Grenzschicht befinden würde, werden die Maxima oberhalb der roten vernachlässigt. Es ist zu sehen, dass beide Grenzschichtdicken für beide Rayleighzahlen stark schwanken. Ähnlich wie bei der zweidimensionalen DNS von Zhou et al. (2010), sind die Schwankungen der

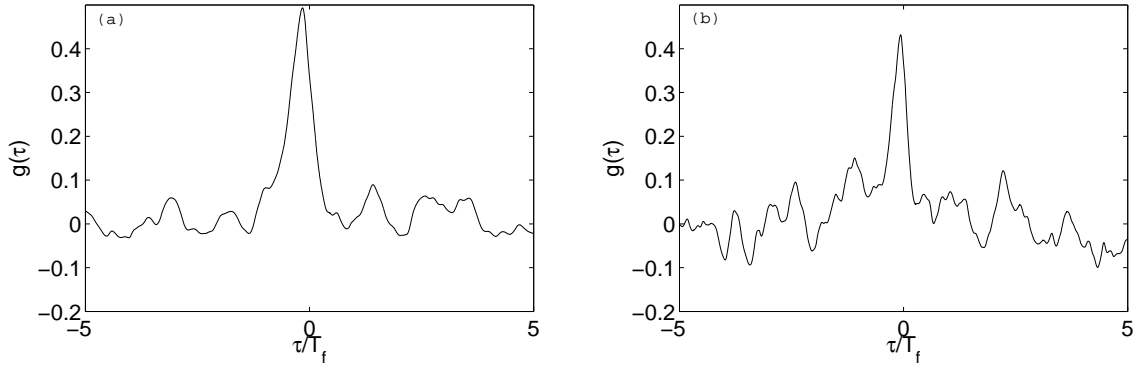


Abbildung 4.7: Kreuzkorrelationskoeffizienten für die zeitliche Änderung der momentanen Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit und thermische Grenzschichtdicke an der oberen Platte. (a) für $Ra = 3 \times 10^9$ mit ca. 57000 Datenpunkten. (b) für $Ra = 3 \times 10^{10}$ mit ca. 23000 Datenpunkten. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit stärker als die der thermischen Grenzschichtdicke.

Das Kreuzkorrelationsverhältnis zwischen den beiden Grenzschichtdicken ist definiert als (Zhou et al., 2010a):

$$g(\tau) = \frac{\langle [\delta_v(t) - \langle \delta_v \rangle_t] [\delta_T(t + \tau) - \langle \delta_T \rangle_t] \rangle_t}{\sqrt{\langle [\delta_v(t) - \langle \delta_v \rangle_t]^2 \rangle_t} \sqrt{\langle [\delta_T(t) - \langle \delta_T \rangle_t]^2 \rangle_t}}. \quad (4.8)$$

Hier bedeutet das Symbol $\langle \cdot \rangle_t$ einen zeitlichen Mittelwert. Die Abbildung 4.7 zeigt das Kreuzkorrelationsverhältnis der beiden Grenzschichtdicken an der oberen Platte.

Abbildung 4.7(a) stellt die Kreuzkorrelationskoeffizienten für die zeitliche Änderung der beiden momentanen Grenzschichtdicken für $Ra = 3 \times 10^9$ dar. Hier sind ca. 57000 Datenpunkte abgebildet. Die Abb. 4.7(b) stellt die Kreuzkorrelationskoeffizienten für $Ra = 3 \times 10^{10}$ dar. Sie wurde aus ca. 23000 Datenpunkten ermittelt. Die Punkte aus der Abb. 4.6, welche die gestrichelte Linie überschreiten, wurden bei der Analyse der Kreuzkorrelation zu 0 gesetzt und somit nicht berücksichtigt. Im Vergleich zur zweidimensionalen DNS bei $Pr = 0.7$ (Zhou et al., 2010a) ist die Änderung der Funktion $g(\tau)$ sehr regelmäßig. In Abb. 4.7(a) und (b) ist deutlich zu sehen, dass der Spitzenwert leicht nach links um weniger als $0.5T_f$ von Null verschoben ist. Das bedeutet, dass die Schwankungen der thermischen Grenzschicht die Variationen der Grenzschicht der Geschwindigkeit bewirken. Die Korrelationen zwischen den beiden schwankenden Grenzschichten sind weniger ausgeprägt als in den zweidimensionalen Untersuchungen. Ein solches Verhalten ist auf die dreidimensionale Natur der Grenzschichtdynamik zurückzuführen.

Um eine charakteristische Zeitskala aus den Zeitreihen zu extrahieren, werden hier die Variationen der Grenzschichtdicken um ihren Mittelwert analysiert und die durchschnittlichen Zeitintervalle bestimmt, bei denen der Mittelwert über- bzw. unterschritten wird. Die Daten für $Ra = 3 \times 10^9$ zeigen, dass dieses Intervall für beide Grenzschichten etwa $T_{cross} \approx 0.5T_f$ ist, wobei $T_f = H/U_f$. Eine charakteristische

Variation der Zeitskala der Grenzschicht ist somit $2T_{cross} \approx T_f$. Diese Zeit kann als der Zeitpunkt interpretiert werden, an dem sich Plumes in einem lokalen Bereich nahe an den Platten beginnen abzulösen. Sie ist kurz im Vergleich zu der durchschnittlichen Umlaufzeit der Lagrange-Tracerteilchen in einer solchen Zelle von etwa $20T_f$ (Emran & Schumacher 2010) gefunden. Die $20T_f$ ist ein Charakteristikum der Umlaufzeit der großskaligen Zirkulation.

4.4 Schwankung der großskaligen Zirkulation in der Konvektionszelle

Der momentane Winkel ϕ_{LSC} und die momentane Amplitude V_{LSC} der großskaligen Zirkulation (LSC) werden ähnlich wie bei (Brown, Nikolaenko & Ahlers, 2005) bestimmt.

$$\phi_{LSC}(t_0) = \left\langle \arctan \frac{u_y(x, y, z_0, t_0)}{u_x(x, y, z_0, t_0)} \right\rangle_{A_r}, \quad (4.9)$$

$$V_{LSC}(t_0) = \left\langle \sqrt{u_x(x, y, z_0, t_0)^2 + u_y(x, y, z_0, t_0)^2} \right\rangle_{A_r}. \quad (4.10)$$

Das Symbol $\langle \cdot \rangle_{A_r}$ bezeichnet den Mittelwert über einen kreisförmigen Querschnitt mit $r \leq 0.88R$ bei $z_0 = \delta_T$ für die untere Platte oder $z_0 = H - \delta_T$ für die obere Platte. Die momentane Richtung der großskaligen Zirkulation wird für das dynamische Reskalieren der Grenzschichtprofile benutzt. Der quadratische Mittelwert (“root-mean-square”) der Geschwindigkeit steht senkrecht zu $\mathbf{v} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$. Das bedeutet, für jeden Punkt $(x, y, z_0) \in A_r$ gilt die Beziehung $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v} = 0$. Dann ist $\mathbf{v}_{\perp, rms}$ gegeben durch

$$\mathbf{V}_{\perp, rms}(t_0) = \sqrt{\langle \mathbf{v}_\perp^2(x, y, z_0, t_0) \rangle_{A_r}}. \quad (4.11)$$

Die Abbildung 4.8 zeigt zwei Diagramme aus der ersten Reihe mit der Richtung der momentanen großskaligen Zirkulation für $Ra = 3 \times 10^9$. Das linke Diagramm stellt die oberen Daten an der Platte, das rechte die an der unteren Platte dar. Es ist deutlich erkennbar, dass die Richtung der momentanen großskaligen Zirkulation an der unteren Platte für jeden Augenblick unterschiedlich zu der an der oberen Platte ist. Das unterstützt die Idee einer verdrehten Zirkulation (Funfschilling & Ahlers, 2004; Xi & Xia, 2008; Xi & Xia, 2008a). Die zwei Diagramme aus der mittleren Reihe stellen die Größen der momentanen großskaligen Zirkulation für $Ra = 3 \times 10^9$ dar. Links steht für die obere, rechts für die untere Platte. Die zwei Diagramme aus der dritten Reihe zeigen die quadratischen Mittelwerte (“root-mean-square”) der Geschwindigkeit, senkrecht zur momentanen großskaligen Zirkulation für $Ra = 3 \times 10^9$. Auch hier steht das linke Diagramm wieder für die obere und das rechte Diagramm für die untere Platte.

Es ist ersichtlich, dass die Zirkulation sowohl in der Amplitude, als auch im Winkel stark schwankt. Bei dem Winkel wird eine schnelle Änderung der Orientierung über einen Bereich von etwa 50° beobachtet.

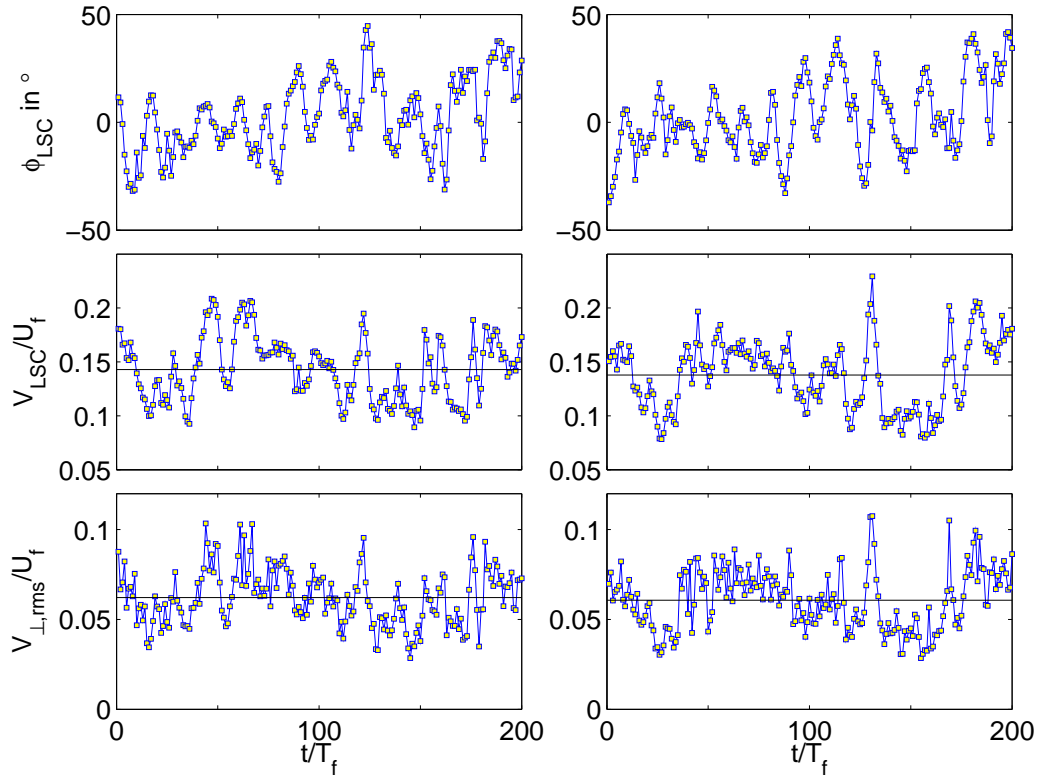


Abbildung 4.8: Richtung ϕ_{LSC} , Größe V_{LSC} und quadratischer Mittelwert der Geschwindigkeit V_{rms} senkrecht zur momentanen großskaligen Zirkulation. Die linke Spalte stellt die obere Platte und die rechte Spalte die untere Platte dar. Alle Daten für $Ra = 3 \times 10^9$. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

Im Durchschnitt stimmt die großskalige Zirkulation nahezu perfekt mit der x-Achse ($\phi = 0$) (im Zylinder), auf dem die Probenfelder 1, 2 und 4 angeordnet sind, überein. Die Schwankung des quadratischen Mittelwertes der Geschwindigkeit, senkrecht zur momentanen großskaligen Zirkulation, ist ebenfalls signifikant und reicht bis zu 50% der V_{LSC} . Dadurch ist er nicht mehr vernachlässigbar, so wie es bei der quasi-zweidimensionalen DNS der Fall ist. Die mittlere Größe der V_{LSC} wird für die Abschätzung einer Umlaufzeit von großskaliger Zirkulation durch $\tau_{LSC} = \overline{V_{LSC}}^{-1} \times 2\pi(H/2) \approx 21T_f$ benutzt. Sie ist auch konsistent mit der Umlaufzeit der großskaliger Zirkulation von $18 T_f$ (das entspricht 35 Sekunden) von Li et al. (2012). Darüber hinaus berichtet Ahlers et al. (2009a) für sein Helium Experiment bei $\Gamma = 1/2$ eine Zeitskala von 25 Sekunden. Durch Multiplikation mit $4/3$, was einer Skalierung der Einheitszelle bedeutet, erhält man den Wert 33 Sekunden.

Der schnellen Oszillation überlagert (Abb. 4.8, oben links) ist eine sehr langsame Drift der Winkel. Dies deutet darauf hin, dass ein kleiner Teil einer sehr langsamen Präzession der großskaligen Zirkulation zu beobachten ist. Ein solch langsamer Modus kann vorhanden sein, weil die Orientierung der Zirkulation nicht in einer bestimmten Richtung, wie häufig in Experimenten, fixiert ist. Ein besserer Zugriff auf diese sehr langsame großskalige Dynamik erfordert Untersuchungen mit niedrigdimensionalen Modellen

(Brown & Ahlers, 2009) oder Modelle, die auf der so genannten Proper Orthogonal Decomposition von turbulenten Feldern beruhen (Bailon-Cuba & Schumacher, 2011).

4.5 Logarithmische Temperaturprofile

Die Theorie von Grossmann & Lohse (2000, 2002 bzw. 2004) beschreibt die klassische Regime mit einem turbulenten Bulk und einer laminaren Grenzschicht in RB Konvektion. Nach Grossmann & Lohse (2011) wird die laminare Grenzschicht turbulent bei sehr großer Rayleighzahl. Grossmann & Lohse (2011) zeigten, dass diese turbulente Grenzschicht mit logarithmischen mittleren Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen in Zusammenhang stehen. Die Regime, wo die komplette Strömung turbulent ist, wird als ultimates Regime bezeichnet. Ahlers et al. (2012) fanden logarithmische mittlere Temperaturprofile in ihren Experimenten, die einen Übergang ultimativen Regime bei $4 \times 10^{12} \lesssim Ra \lesssim 10^{15}$ zeigten und für $Pr \simeq 0.8$ und $\Gamma = 0.5$ stattfanden.

Motiviert durch diese Arbeiten, untersuchten wir ob unsere eigenen Datensätze sich auch durch logarithmische Gesetze anpassen lassen. Hier wurden die logarithmischen Temperaturprofile von der oberen Platte für vier Probenfelder bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$ untersucht. Probenfeld 1 befindet sich auf der Mittellinie. Probenfelder 2, 3 und 4 liegen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 0.88R$ und $\phi = 0, \pi/2$ und π , siehe Abb. 4.1(a). Für $Ra = 3 \times 10^9$ wurden 4×40 Proben genommen. Für $Ra = 3 \times 10^{10}$ wurden 4×100 Proben genommen. Die dimensionslose zeitlich gemittelte Temperatur T kann wie Ahlers et al. (2012) dargestellt werden durch

$$T = A * \ln(z/H) + B \quad (4.12)$$

Wobei z der Abstand von der oberen Platte und H die Höhe der Konvektionszelle ist. T ist 0 auf der oberen Platte und 1 auf der unteren Platte. A und B sind Parameter, die aus den Fits folgen.

Die Abb. 4.9 stellt die Anpassung der logarithmischen mittleren Temperaturprofile von der oberen Platte für vier Probenfelder bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$ dar. Die Abb. 4.9 (a), (b), (c) und (d) ist für Probenfelder 1, 2, 3 und 4. Die Tabelle 4.1 zeigt die Parameter A und B für $T = A * \ln(z/H) + B$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ bzw. $Ra = 3 \times 10^{10}$. A_1 und B_1 sind für Probenfeld 1. A_2 und B_2 sind für Probenfeld 2. A_3 und B_3 sind für Probenfeld 3. A_4 und B_4 sind für Probenfeld 4.

Wir fanden hier auch logarithmische mittlere Temperaturprofile für alle vier Probenfelder bei unseren relativ niedrigen Rayleighzahlen von $Ra = 3 \times 10^9$ und 3×10^{10} . Anhand der Abb. 4.9, Abb. 4.10 und der Tabelle 4.1 ist erkennbar, dass bei nach oben verlaufender mittlerer Strömung im Probenfeld 2 der Parameter A relativ gesehen, größer wird. Wenn die Strömung in den Probenfelder 3 und 4 im Bereich der mittleren Strömung abwärts gerichtet ist, wird der Parameter A relativ gesehen kleiner.

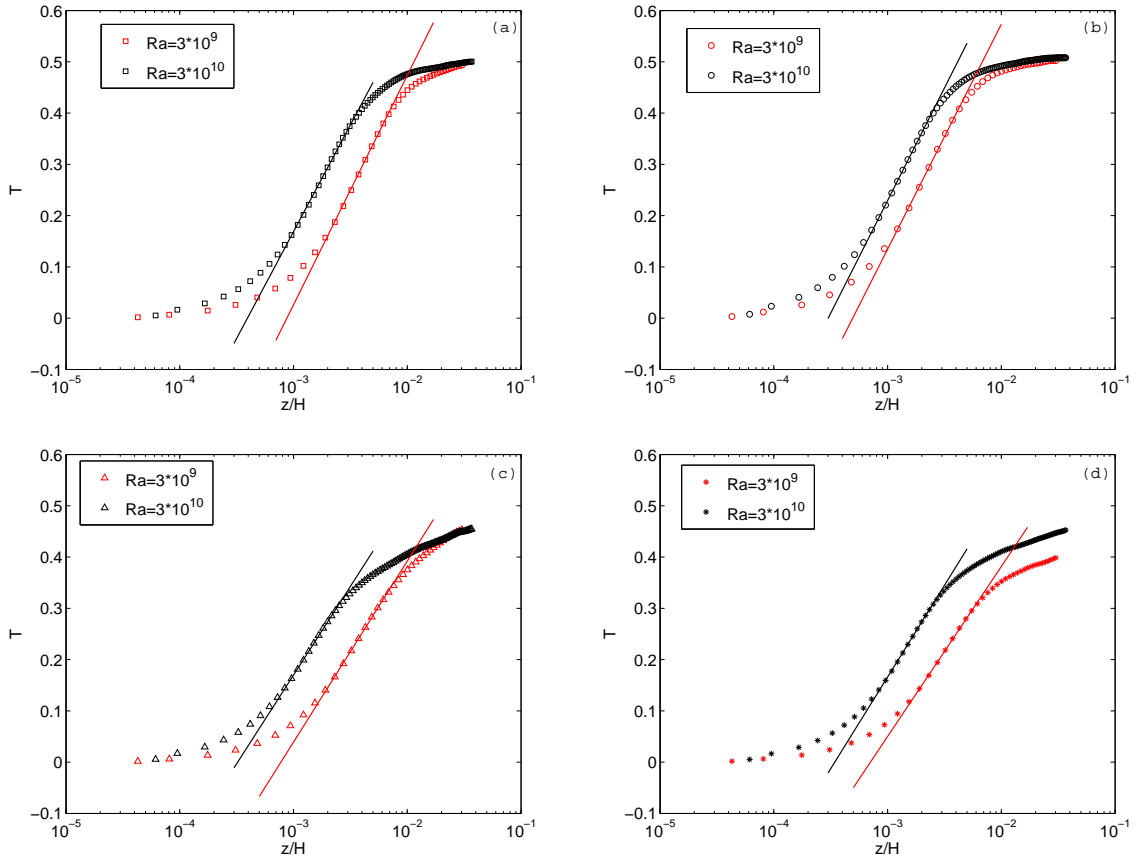


Abbildung 4.9: Fit logarithmischer mittleren Temperaturprofile mit $T = A * \ln(z/H) + B$ für vier Probenfelder bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$. (a) Fit logarithmischer mittleren Temperaturprofile für Probenfeld 1. Probenfeld 1 ist montiert bei $(r, \phi) = (0, 0)$. (b) Fit logarithmischer mittleren Temperaturprofile für Probenfeld 2. Probenfeld 2 ist montiert bei $(r, \phi) = (0.88R, 0)$. (c) Fit logarithmischer mittleren Temperaturprofile für Probenfeld 3. Probenfeld 3 ist montiert bei $(r, \phi) = (0.88R, \pi/2)$. (d) Fit logarithmischer mittleren Temperaturprofile für Probenfeld 4. Probenfeld 4 ist montiert bei $(r, \phi) = (0.88R, \pi)$. Die rote und schwarze Linie ist für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$.

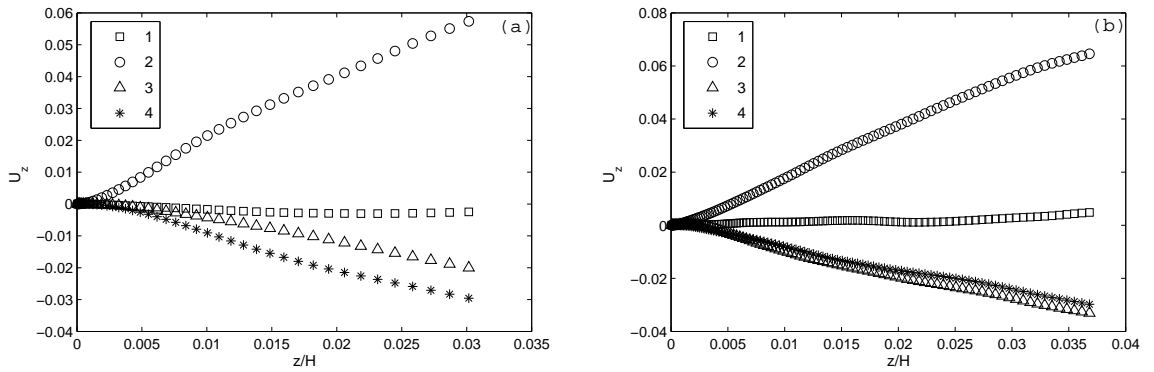


Abbildung 4.10: Mittlere Profile der vertikalen Geschwindigkeitskomponente für die vier Probenfelder bei $Ra = 3 \times 10^9$ (a) und bei $Ra = 3 \times 10^{10}$ (b). Alle Daten sind für $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$.

Ra	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4
3×10^9	0.1943	1.3681	0.1906	1.4509	0.1532	1.0976	0.1440	1.0448
3×10^{10}	0.1809	1.4186	0.1908	1.5472	0.1502	1.2076	0.1554	1.2391

Tabelle 4.1: Parameter A und B für $T = A * \ln(z/H) + B$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ bzw. $Ra = 3 \times 10^{10}$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$. A_1 und B_1 sind für Probenfeld 1. A_2 und B_2 sind für Probenfeld 2. A_3 und B_3 sind für Probenfeld 3. A_4 und B_4 sind für Probenfeld 4.

Eine Analyse der logarithmischen mittleren Temperaturprofile ist nicht genug zu identifizieren, ob die Grenzschicht laminar oder turbulent ist. Die thermische Plumes konnten die logarithmischen Temperaturprofile verursachen. Die Größe des Parameters A kann man u. U. mit der großskaligen Zirkulation verbinden. Diese Untersuchung legt erneut nahe, dass die Grenzschichten, bereits Elemente einer turbulenten Grenzschicht tragen, der Übergang zur turbulenten Schicht sich unter Umständen über einen längeren Bereich vollzieht. Dreidimensionale Strukturen, lokale Wirbel (siehe Kapitel 7.4) tragen zu den beobachteten Profilen bei.

5 Vergleich mit laminaren Grenzschichten der Mischkonvektion

Am Anfang dieses Kapitels wird die zweidimensionale Grenzschichtentheorie der Mischkonvektion erklärt. Zuerst wird die Störungsentwicklung für rein erzwungene Konvektion nach Sparrow & Minkowycz (1962) und für rein natürliche Konvektion nach Stewartson (1958) erläutert. Dann werden die normierten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile mit der Störungsentwicklung der ersten Ordnung von erzwungener und natürlicher Konvektion für verschiedene Entwicklungsparameter ϵ bei $Pr = 0.7$ dargestellt. Schließlich wird die Abhängigkeit zwischen der Grenzschichtdicke und Rayleighzahl für erzwungene und natürliche Konvektion bei $Pr \approx 1$ analysiert. Anschließend folgt eine Untersuchung der Grenzschichtdynamik in einem kleinen Beobachtungsfenster für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ bei $Pr = 0.7$. Dort konnten zwei charakteristische dynamische Sequenzen der Grenzschichtstrukturen gefunden werden. Dabei handelt es sich einerseits um die Plumeablösungsphase und andererseits um die Relaminarisierungsphase. Ihre entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten und Temperaturen werden analysiert und dargestellt. Schließlich werden die zeitlich gemittelten Profile von den kurzen dynamischen Sequenzen mit den Vorhersagen aus der Grenzschichttheorie der gemischten Konvektion verglichen. Dabei beinhalten die Vorhersagen der Grenzschichttheorie der gemischten Konvektion Störungen erster Ordnung.

5.1 Zweidimensionale Grenzschichtentheorie der Mischkonvektion

Bei Mischkonvektion handelt es sich um die Überlagerung von erzwungener und natürlicher Konvektion. Die Störungsentwicklung zur Mischkonvektion wurde von Sparrow & Minkowycz (1962) und Stewartson (1958) wie folgt untersucht. Die Ähnlichkeitsvariable sei gegeben durch

$$\eta = \begin{cases} zRe_x^{1/2}/x & \text{für erzwungene Konvektion} \\ zGr_x^{1/5}/x & \text{für natürliche Konvektion} \end{cases} \quad (5.1)$$

und der Entwicklungsparameter ist definiert als

$$\epsilon = \begin{cases} Gr_x / Re_x^{5/2} & \text{für erzwungene Konvektion} \\ Re_x / Gr_x^{2/5} & \text{für natürliche Konvektion} \end{cases} \quad (5.2)$$

Die entsprechenden dimensionslosen Parameter sind die Reynolds- und Grashofzahl,

$$Re_x = \frac{V_\infty x}{\nu}, \quad Gr_x = \frac{g\alpha(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}. \quad (5.3)$$

Das vorliegende Problem ist erneut zweidimensional und man verwendet wieder die Stromfunktion anstelle der Geschwindigkeitskomponenten, da diese die Inkompressibilitätsbedingung automatisch erfüllt. Folgende Erweiterungen gelten für den Fall der erzwungenen Konvektion:

$$\psi(x, z) = \sqrt{\nu x U_\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m f_m(\eta) \right], \quad (5.4)$$

$$T(x, z) = T_\infty + (T_w - T_\infty) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \theta_m(\eta) \right], \quad (5.5)$$

zum Beispiel in den folgenden Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten

$$u_x(x, z) = V_\infty \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m f'_m(\eta) \right], \quad (5.6)$$

$$u_z(x, z) = \frac{V_\infty}{2\sqrt{Re_x}} \left[(\eta f'_0(\eta) - f_0(\eta)) + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \left(\eta f'_m(\eta) + \left(\frac{m}{2} - 1 \right) f_m(\eta) \right) \right]. \quad (5.7)$$

Wenn $m = 0$ ist, bekommt man die klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen Gleichungen.

$$f_0''' + \frac{1}{2} f_0'' f_0 = 0, \quad (5.8)$$

$$\theta_0'' + \frac{Pr}{2} f_0 \theta_0' = 0. \quad (5.9)$$

Hierbei sind die Randbedingungen $f_0(0) = f_0'(0) = 0$, $\theta_0(0) = 1$ und $f_0'(\infty) = 1$, $\theta_0(\infty) = 0$.

Für $m = 1$ erhält man

$$f_1''' + f_0'' f_1 + \frac{1}{2} f_0 f_1'' - \frac{1}{2} f_0' f_1' - \frac{1}{2} h_0 + \frac{\eta}{2} h_0' = 0, \quad (5.10)$$

$$h_0' = \theta_0, \quad (5.11)$$

$$\theta_1'' + \frac{Pr}{2} f_0 \theta_1' - \frac{Pr}{2} f_0' \theta_1 + Pr \theta_0' f_1 = 0, \quad (5.12)$$

mit den Randbedingungen $f_1(0) = f_1'(0) = \theta_1(0) = 0$ und $f_1'(\infty) = \theta_1(\infty) = h_0(\infty) = 0$. h_0 und h_0' ergeben sich aus dem Druck.

Für die natürliche Konvektion werden die Erweiterungen wie folgt angepasst:

$$\psi(x, z) = \sqrt[5]{\nu^3 g \alpha (T_w - T_\infty) x^3} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m g_m(\eta) \right], \quad (5.13)$$

$$T(x, z) = T_\infty + (T_w - T_\infty) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \chi_m(\eta) \right]. \quad (5.14)$$

Der Fall $m=0$ wurde zuerst von Stewartson (1958) diskutiert und ergibt:

$$g_0''' + \frac{3}{5} g_0'' g_0 - \frac{1}{5} g_0' g_0' - \frac{2}{5} k_0 + \frac{2}{5} \eta k_0' = 0, \quad (5.15)$$

$$k_0' = \chi_0, \quad (5.16)$$

$$\chi_0'' + \frac{3Pr}{5} g_0 \chi_0' = 0. \quad (5.17)$$

Die Randbedingungen sind $g_0(0) = g_0'(0) = 0$, $\chi_0(0) = 1$ und $g_0'(\infty) = \chi_0(\infty) = k_0(\infty) = 0$.

Für $m = 1$ erhält man dann:

$$g_1''' + \frac{3}{5} g_1'' g_0 - \frac{1}{5} g_1' g_0' + \frac{2}{5} g_0'' g_1 - \frac{1}{5} k_1 + \frac{2}{5} \eta k_1' = 0, \quad (5.18)$$

$$k_1' = \chi_1, \quad (5.19)$$

$$\chi_1'' + \frac{3Pr}{5} g_0 \chi_1' + \frac{Pr}{5} g_0' \chi_1 + \frac{2Pr}{5} \chi_0' g_1 = 0, \quad (5.20)$$

mit $g_1(0) = g_1'(0) = \chi_1(0) = \chi_1(\infty) = k_1(\infty) = 0$ und $g_1'(\infty) = 1$. k_0 und k_1 ergeben sich erneut aus dem Druck. Die Gleichungen (5.8) – (5.12) und (5.15) – (5.20) wurden mit Matlab gelöst und die Ergebnisse sind in Abb. 5.1 dargestellt.

In turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion kann die Grenzschicht als gemischte Art betrachtet werden, weil die Grenzschicht durch die natürliche Konvektion und auch durch die großskalige Zirkulation getrieben wird. In der klassischen Grenzschichttheorie sind beide Grenzfälle ansatzweise untersucht worden. Es gibt die rein erzwungene Konvektion, die bekannt ist als der klassische Prandtl-Blasius-Pohlhausen Fall (Blasius 1908; Pohlhausen 1921), und die rein natürliche Konvektion (Stewartson 1958; Rotem & Claassen 1969). Für die gemischte Konvektion werden die Boussinesq-Bewegungsgleichungen (2.2) – (2.4) zu dem folgenden Satz von zweidimensionalen und stationären Grenzschichtgleichungen (Schlichting 1957) vereinfacht:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (5.21)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha g T, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (5.23)$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5.24)$$

Die Randbedingungen sind:

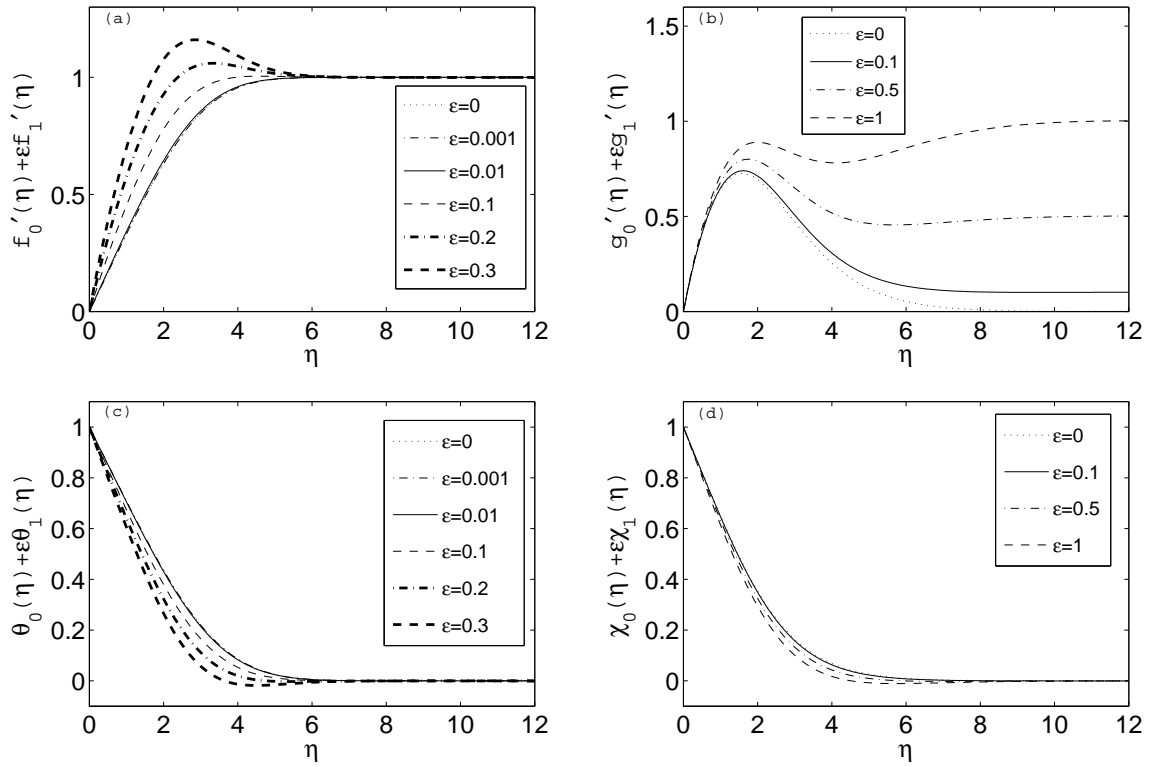


Abbildung 5.1: Vertikale Profile der normierten Geschwindigkeit und Temperatur, die sich aus der ersten Ordnung der Störungsentwicklung von erzwungener (a, c) und natürlicher Konvektion (b, d) ergeben. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

- $T = T_w$ und $u_x = u_z = 0$, bei $z = 0$
- $T = T_\infty$ und $u_x = V_\infty$ für erzwungene Konvektion bzw. $u_x = 0$ für natürliche Konvektion, bei $z \rightarrow \infty$.

In beiden Fällen können die Ähnlichkeitsvariable η und der Parameter ϵ für die Störungsentwicklung in der gemischten Konvektion definiert werden. In Übereinstimmung mit den Definitionen (4.1) – (4.3) folgt die Expansion für rein erzwungene Konvektion nach (Sparrow & Minkowycz, 1962):

$$\frac{u_r(x, z)}{V_\infty} = f'_0(\eta) + \epsilon f'_1(\eta) + \dots, \quad (5.25)$$

$$\Xi(x, z) = \frac{T(x, z) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta_0(\eta) + \epsilon \theta_1(\eta) + \dots \quad (5.26)$$

Die Expansion für rein natürliche Konvektion ist (Stewartson, 1958):

$$\frac{u_r(x, z)}{V_n(x)} = g'_0(\eta) + \epsilon g'_1(\eta) + \dots, \quad (5.27)$$

$$\Xi(x, z) = \frac{T(x, z) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \chi_0(\eta) + \epsilon \chi_1(\eta) + \dots \quad (5.28)$$

Dabei repräsentieren die Funktionen mit dem Index 0 die ungestörten Geschwindigkeits- und Temperaturkomponenten. Darüber hinaus ist $V_n(x) = (\nu g^2 \alpha^2 (T_w - T_\infty)^2 x)^{1/5}$. Die resultierenden Systeme

der Störungsentwicklung für die Randwertprobleme können durch das Schieß-Verfahren mittels Runge-Kutta-Schema 4. Ordnung (Hieber 1973) gelöst werden.

Die Abbildung 5.1 zeigt die resultierenden mittleren Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für $Pr = 0.7$. Die erste Spalte steht für erzwungene Konvektion und zweite Spalte für natürliche Konvektion. Hier wird die Störungsentwicklung nur für die erste Ordnung durchgeführt und die Kurven für verschiedene Größen der Parameter ϵ dargestellt. Die Grenzschichtströmung wird beschleunigt, wenn Auftriebseffekte an den klassischen Blasius-Fall (für $\epsilon = 0$) hinzugefügt werden, wie in Abb. 5.1 (a) zu sehen ist. Das gleiche gilt, wenn eine rein natürliche Konvektionsschicht zusätzlich durch einen äußeren Strom wie die großskalige Zirkulation in dem gegenwärtigen System angetrieben wird, wie in Abb. 5.1 (b) zu sehen ist. Die auferlegte äußere Strömung bewirkt eine signifikante Veränderung des Geschwindigkeitsprofils. Die Änderungen im Temperaturprofil sind weniger ausgeprägt. In beiden Fällen weichen die mittleren Temperaturprofile leicht von den ungestörten Ergebnissen ab. Hier werden Beispiele für sehr große Parameter ϵ gezeigt, um die Abweichungen zu verdeutlichen. Man kann die Rayleighzahl in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke in beiden Grenzfällen abschätzen. In erzwungener Konvektion ist die Abhängigkeit gegeben durch (Schlichting, 1957):

$$\delta_v \sim \frac{x}{Re_x^{1/2}}. \quad (5.29)$$

Die Beziehung zwischen Reynolds- und Rayleighzahl $Re \sim Ra^{0.45}$ ist für die Konvektion bei $Pr \approx 1$ und $\Gamma = 1$ aus Ahlers et al (2009) entnommen. Deren Anwendung führt zu einer Rayleighzahlabhängigkeit $\delta_v \approx \delta_T \sim Ra^{0.22}$ für die rein erzwungene Konvektion. In einer natürlichen Konvektion wird die Grashofzahl mit der Reynoldszahl und mit der Ähnlichkeitsvariable $\eta = zGr_x^{1/5}/x$ substituiert. Dann erhält man:

$$\delta_T \sim \frac{x}{Gr_x^{1/5}}. \quad (5.30)$$

Wenn es hier um eine natürliche Konvektion mit Prandtlzahl von etwa eins geht, so dass $Gr_x \approx Ra$, dann folgt $\delta_v \approx \delta_T \sim Ra^{0.2}$. Das ist sehr nahe an der erzwungenen Konvektion. Beide Skalierungsschätzungen zeigen, dass die Unterschiede in der Rayleighzahlabhängigkeit der Grenzschichtdicken relative klein sind, wenn natürliche und erzwungene Konvektion verglichen werden.

5.2 Grenzschichtdynamik in einem kleinen Beobachtungsfenster

Durch die vorliegende DNS ist es möglich, die Grenzschichtdynamik bei hohen Rayleighzahlen vollständig aufzulösen und zu testen, wie gut die lokalen Profile mit den Ergebnissen der klassischen Grenzschichttheorien übereinstimmen. In dem umfangreichen Datensatz konnten zwei charakteristische dynamische Sequenzen der Grenzschichtstrukturen ermittelt werden. Eine ist die Plumeablösungsphase

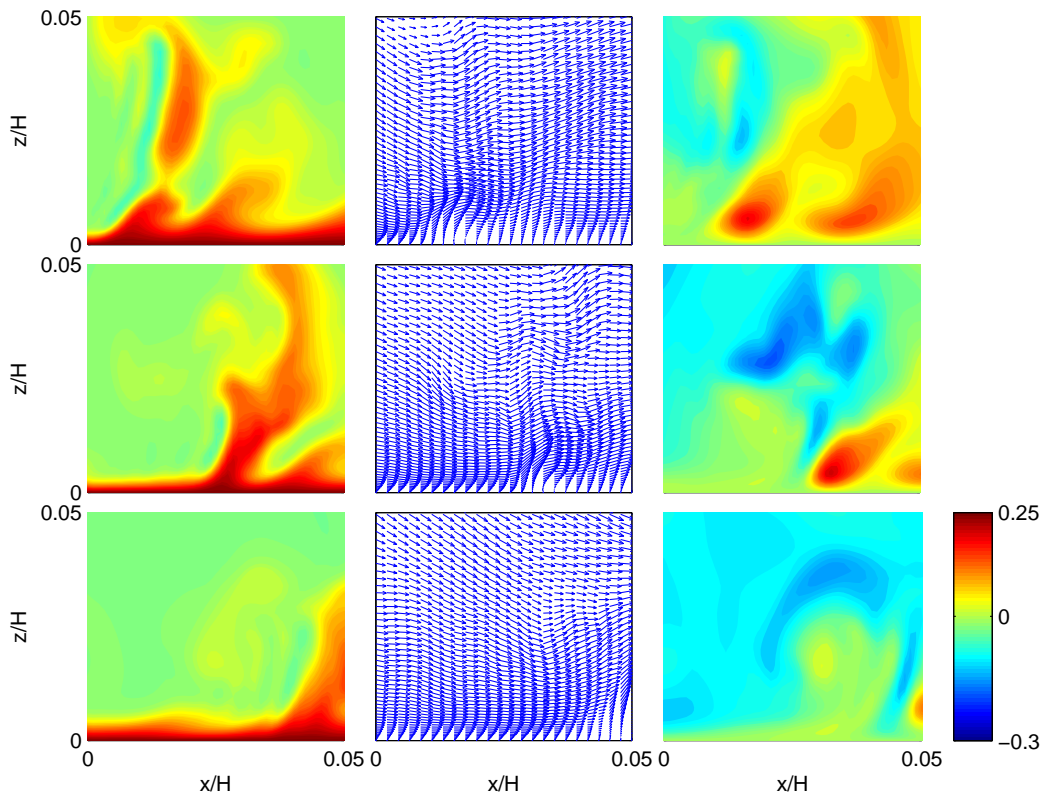


Abbildung 5.2: Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnitten Schnappschusses für die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”). Die erste Spalte zeigt die Konturen der Temperatur T , die zweite zeigt ein Vektor-Diagramm von (u_r, u_z) und die dritte zeigt Konturen von u_ϕ . Die erste Reihe zeigt die Daten aus dem ersten Schnappschuss, die zweite Reihe zeigt die Daten aus dem fünften Schnappschuss und die dritte Reihe zeigt die Daten aus dem neunten Schnappschuss. Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$, wobei $\delta_T/H = 0.0057$. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

(“plume detachment event”), die andere ist die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”). Jede dieser beiden typischen Sequenzen umfasst ungefähr eine Zeit von etwa $0.45T_f$ für beide untersuchten Rayleighzahlen. Man kann sie als die beiden wesentlichen Bausteine der Grenzschichtdynamik betrachten. Hier wurde ein Fenster in einer kleinen senkrechten Beobachtungsebene analysiert, die mit der momentanen großskaligen Zirkulation ausgerichtet ist. Dieses Beobachtungsfenster hat die Größe von Länge \times Höhe gleich $9\delta_T \times 9\delta_T$ für $Ra = 3 \times 10^9$ und $19\delta_T \times 19\delta_T$ für $Ra = 3 \times 10^{10}$. Die dichte zeitliche Ausgabe der Daten umfasst $35T_f$ für $Ra = 3 \times 10^9$ und $5T_f$ für $Ra = 3 \times 10^{10}$ mit einem Zeitintervall von $0.05T_f$.

Die Abbildung 5.2 zeigt eine typische Plumeablösungsphase (“plume detachment event”), bei der die Temperatur in der ersten Spalte, die Geschwindigkeitskomponenten (u_r, u_z) in der Ebene in der zweiten Spalte und die Geschwindigkeitskomponente u_ϕ aus der Ebene in der dritten Spalte dargestellt sind. Die Zeit in der ersten, zweiten und dritten Reihe ist entsprechend $0.05T_f$, $0.25T_f$ und $0.45T_f$. Die farbige Kontur für die Temperatur in der ersten Spalte entspricht erneut einer äquidistanten Farbskala zwischen 0 (blau) und 1 (rot). Die azimuthale Geschwindigkeitskomponente in der dritten Spalte wird

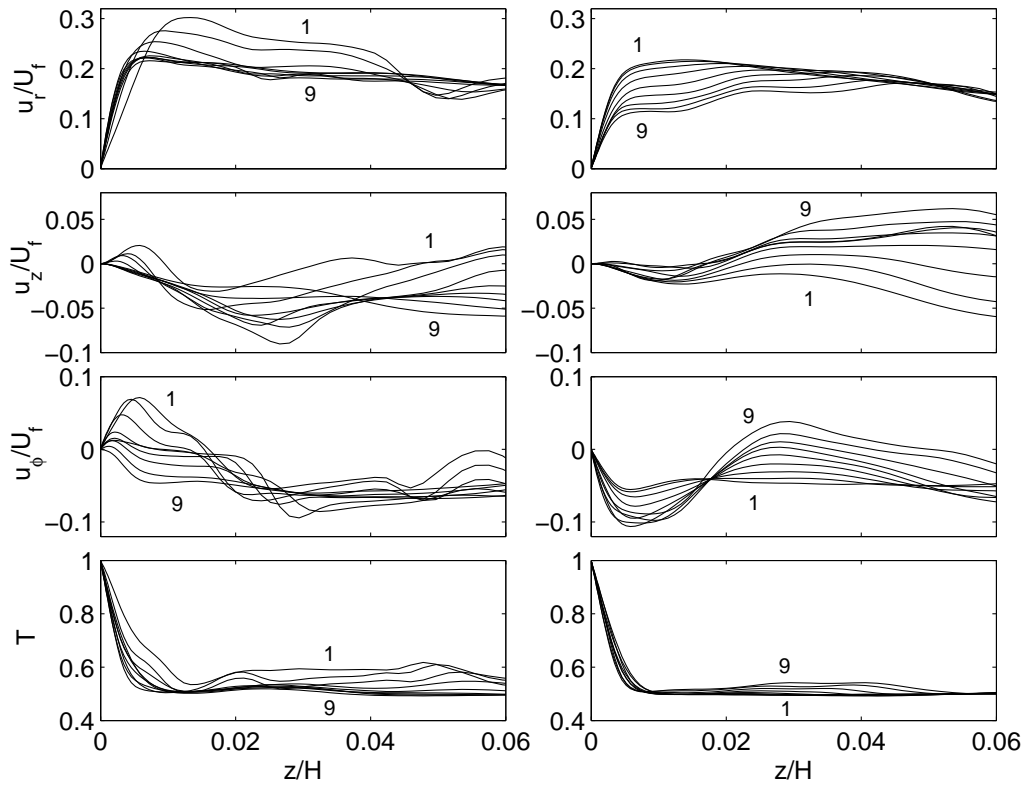


Abbildung 5.3: Sequenz von neun Profilen, die mit den Daten von Abb. 5.2 für die Plumeablösungsphase (linke Spalte) und mit den Daten von Abb. 5.4 für die Relaminarisierung (rechte Spalte). Sie werden durch eine Mittelung in radialer (oder x-) Richtung über das Fenster ermittelt. Von oben nach unten sind radiale Geschwindigkeitskomponente u_r/U_f , vertikale Geschwindigkeitskomponente u_z/U_f , azimuthale Geschwindigkeitskomponente u_ϕ/U_f und die Temperatur T dargestellt. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

erneut durch die Farblegende in der rechten Spalte angezeigt. Blau ist für negative Werte und rot für positive Werte. Diese drei Zeitpunkte sind die Schnappschüsse 1, 5 und 9 aus einer Sequenz von neun äquidistanten Momentaufnahmen. Es ist zu sehen, dass der Aufstieg der heißen Flüssigkeit eine starke Ausströmung nach oben verursacht, der mit der Plumeablösung verbunden ist. Diese ist im Einklang mit einem starken Zufluss in den Rücken des Plumes aufgrund der Inkompressibilität der Strömung. Der ganze Ablösungsprozess wird davon begleitet, dass ein Seitenwind existiert, der die Dreidimensionalität des gesamten dynamischen Prozesses unterstreicht. Die Plumeablösung ist einer der dynamischen Prozesse, die die Schwankungen der Grenzschichtdicken verursachen. Die signifikante azimuthale Geschwindigkeitskomponente bestätigt die früheren Untersuchungen von Shishkina & Wagner (2008), dass ein starkes lokales Wirbelvektorfeld mit der Ablösung des “line-like plumes” einhergeht.

Die entsprechenden Profile der mittleren Geschwindigkeitskomponenten und der Temperatur werden in der linken Spalte der Abbildung 5.3 gezeigt. Sie werden durch die Mittelung in dem Beobachtungsfenster über die radiale Richtung ermittelt. Die Ablösung wird durch eine Abnahme der Radialgeschwindigkeit u_r begleitet. Es gibt starke Ein- und Ausströmungen aus der bzw. in die Bulkregion. Die Tem-

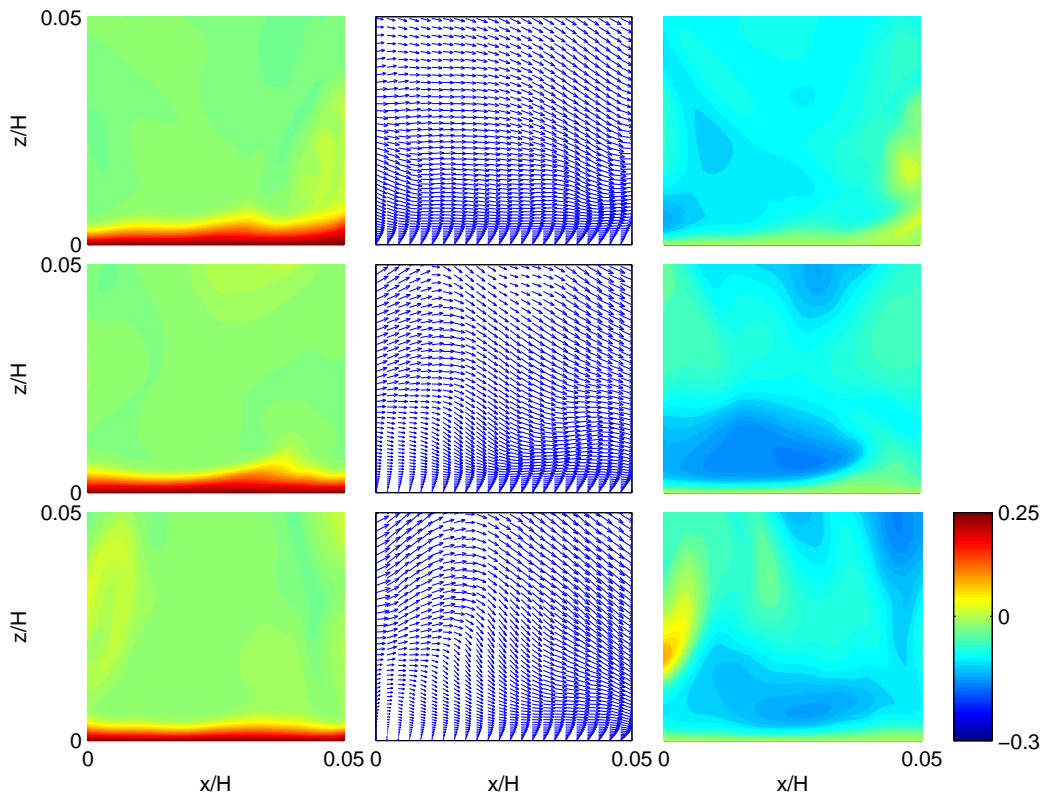


Abbildung 5.4: Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”). Die erste Spalte zeigt die Konturen der Temperatur T , die zweite zeigt ein Vektor-Diagramm von (u_r, u_z) und die dritte zeigt Konturen von u_ϕ . Die erste Reihe zeigt die Daten aus dem ersten Schnappschuss, die zweite Reihe zeigt die Daten aus dem fünften Schnappschuss und die dritte Reihe zeigt die Daten aus dem neunten Schnappschuss. Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$, wobei $\delta_T/H = 0.0057$. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

peraturprofile weichen wesentlich vom klassischen laminaren Grenzschichtprofil ab (siehe Abb. 5.1), wenn das heiße Flüssigkeitspaket den Beobachtungsbereich verlässt.

Die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”) ist in der Abbildung 5.4 dargestellt. Die Temperatur ist in der ersten Spalte, die Geschwindigkeitskomponenten (u_r, u_z) in der Ebene in der zweiten Spalte und die Geschwindigkeitskomponente u_ϕ aus der Ebene in der dritten Spalte gezeigt. Die Zeit in der ersten, zweiten und dritten Reihe ist entsprechend $0.05T_f$, $0.25T_f$ und $0.45T_f$. Die farbige Kontur für die Temperatur in der ersten Spalte entspricht erneut einer äquidistanten Farbskala zwischen 0 (blau) und 1 (rot). Die azimuthale Geschwindigkeitskomponente in der dritten Spalte wird erneut durch die Farblegende in der rechten Spalte angezeigt. Blau ist für negative Werte und rot für positive Werte. Diese drei Zeitpunkte sind die Schnappschüsse 1, 5 und 9 aus einer Sequenz von neun äquidistanten Momentaufnahmen. Auf den ersten Blick scheinen die Strömung und die Temperaturfelder viel besser mit den Vorhersagen aus der Theorie der laminaren Grenzschicht übereinzustimmen. Jedoch nicht zu weit entfernt von der Wand sind nicht vernachlässigbare, nach oben und unten gerichtete Flüsse vor-

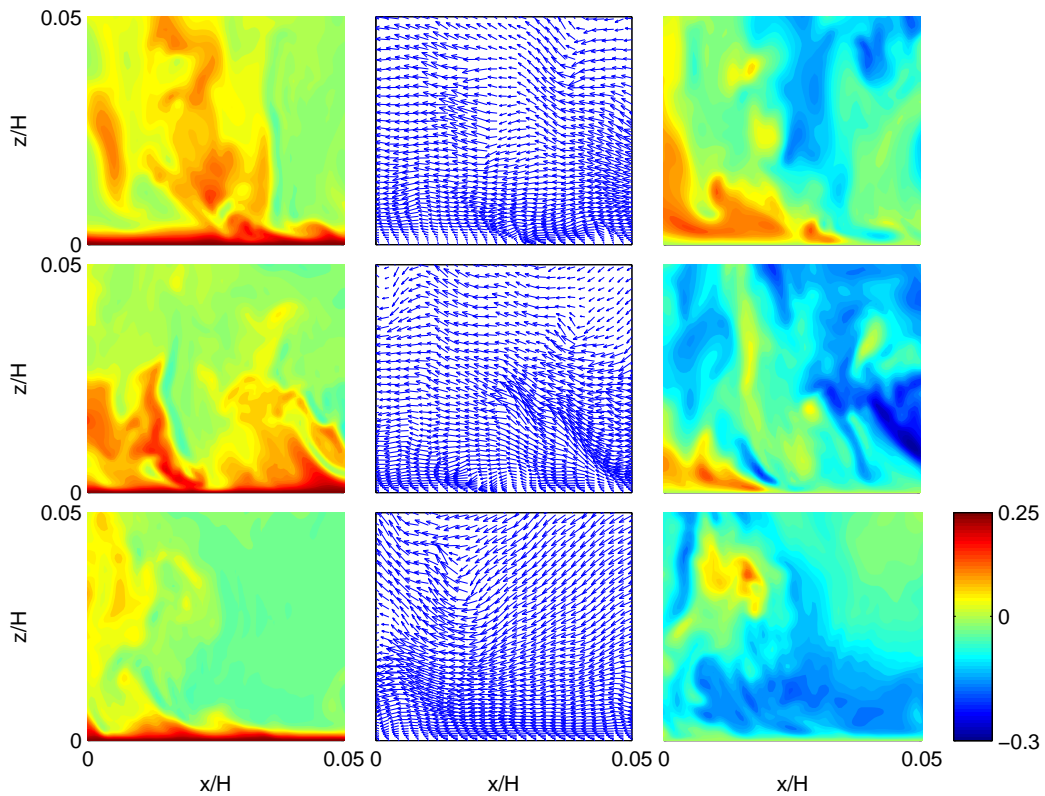


Abbildung 5.5: Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”). Die erste Spalte zeigt die Konturen der Temperatur T , die zweite zeigt ein Vektor-Diagramm von (u_r, u_z) und die dritte zeigt Konturen von u_ϕ . Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^{10}$, wobei $\delta_T/H = 0.0026$. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

handen. Im Vergleich zur Plumeablösungsphase (“plume detachment event”) sind hier die Schichten des Temperaturfeldes nahezu ungestört und die azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten sind homogener über dem Fenster verteilt.

Die entsprechenden Profile der mittleren radialen, vertikalen bzw. azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten und der Temperatur werden in der rechten Spalte der Abbildung 5.3 dargestellt. Es ist zu sehen, dass hier die Temperaturprofile viel weniger gestört sind als bei der Plumeablösungsphase (“plume detachment event”). Aber auch in dieser Phase ist die Strömung dreidimensional, wie die Profile der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente zeigen. Das Beobachtungsfenster in Abb. 5.2 und Abb. 5.4 hat eine Höhe von $0.05H$. Bis zu diesem Abstand von der Wand ist die maximale Größe der mittleren vertikalen Geschwindigkeitskomponente viel kleiner.

Die radialen Geschwindigkeits- und Temperaturprofile in beiden Sequenzen zeigen, dass die Profile sogar über eine solche kurze dynamische Sequenz stark variieren. Die Geschwindigkeit in der Grenzschicht ist stark erhöht. Das ist gleich der zweidimensionalen perturbativen Analyse, wie im gezwungen Fall (siehe. Abb. 5.1(a)). Darüber hinaus deuten die vorgestellten Daten darauf hin, dass die großskalige

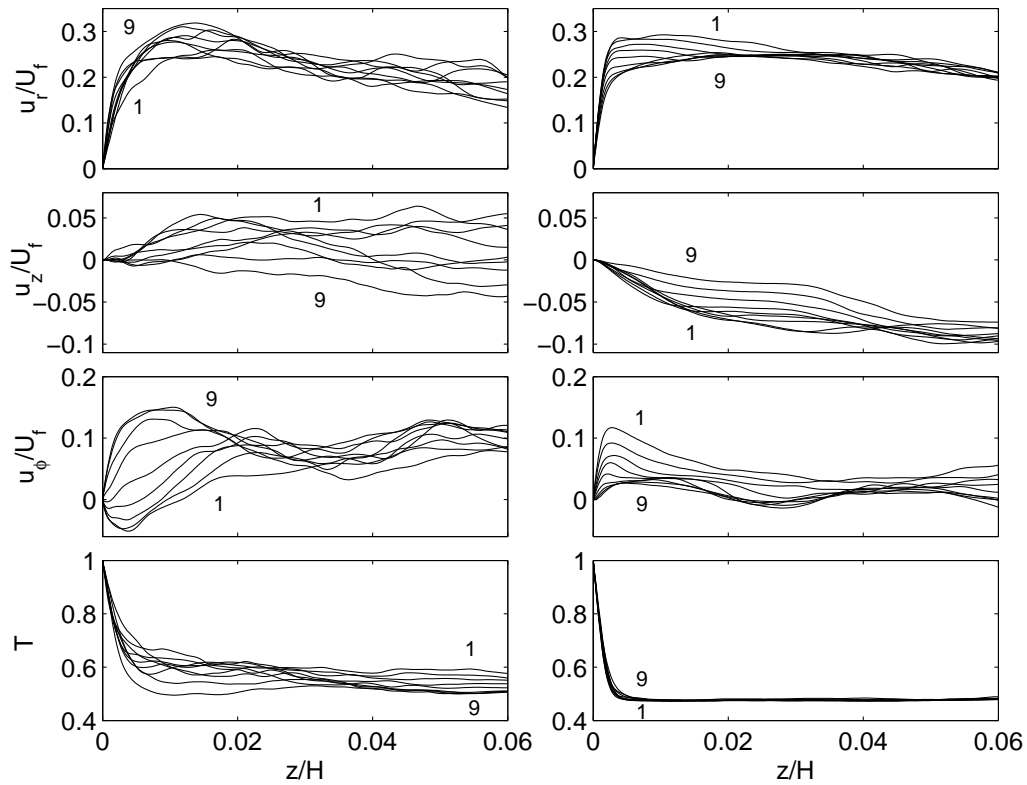


Abbildung 5.6: Sequenz von neun Profilen mit den Daten von Abb. 5.5 für die Plumeablösungsphase (linke Spalte) und mit den Daten von Abb. 5.7 für die Relaminarisierungsphase (rechte Spalte). Sie werden durch eine Mittelung in radialer (oder x-) Richtung über das Fenster gewonnen. Von oben nach unten sind die radiale Geschwindigkeitskomponente u_r/u_f , die vertikale Geschwindigkeitskomponente u_z/u_f , die azimuthale Geschwindigkeitskomponente u_ϕ/u_f und die Temperatur T dargestellt. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

Zirkulation immer stark genug ist, so dass die reine natürliche Konvektion mit einer Geschwindigkeit, die in Strömungsrichtung gegen Null geht, nicht vorkommt (siehe Abb. 5.1(b)).

Diese Analyse wurde für $Ra = 3 \times 10^{10}$ wiederholt. Das qualitative Bild bleibt unverändert für die beiden Phasen Plumeablösungsphase und Relaminarisierungsphase. Hier ist die Richtung des großskaligen Windes umgekehrt im Vergleich zu der für $Ra = 3 \times 10^9$. Die Plumeablösungsphase ist in der Abbildung 5.5 und die Relaminarisierungsphase in der Abbildung 5.7 dargestellt. Die Zeit in der ersten, zweiten und dritten Reihe ist entsprechend $0.05T_f$, $0.25T_f$ und $0.45T_f$. Die farbliche Kodierung gleicht den Fällen für $Ra = 3 \times 10^9$. Wie zu erwarten sind die Ablösungspulmen mehr filamentiert und die Grenzschicht ist in der Relaminarisierungsphase dünner. Die Amplitude der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente bleibt signifikant, wie in Abb. 5.6 zu sehen ist. Die Abbildung 5.6 stellt die entsprechenden Profile der mittleren radialen Geschwindigkeitskomponente u_r/u_f , der vertikalen Geschwindigkeitskomponente u_z/u_f , der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente u_ϕ/u_f und der Temperatur T für beide Phasen dar.

In beiden Rayleighzahlen zeigen die Profile der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente u_ϕ das fol-

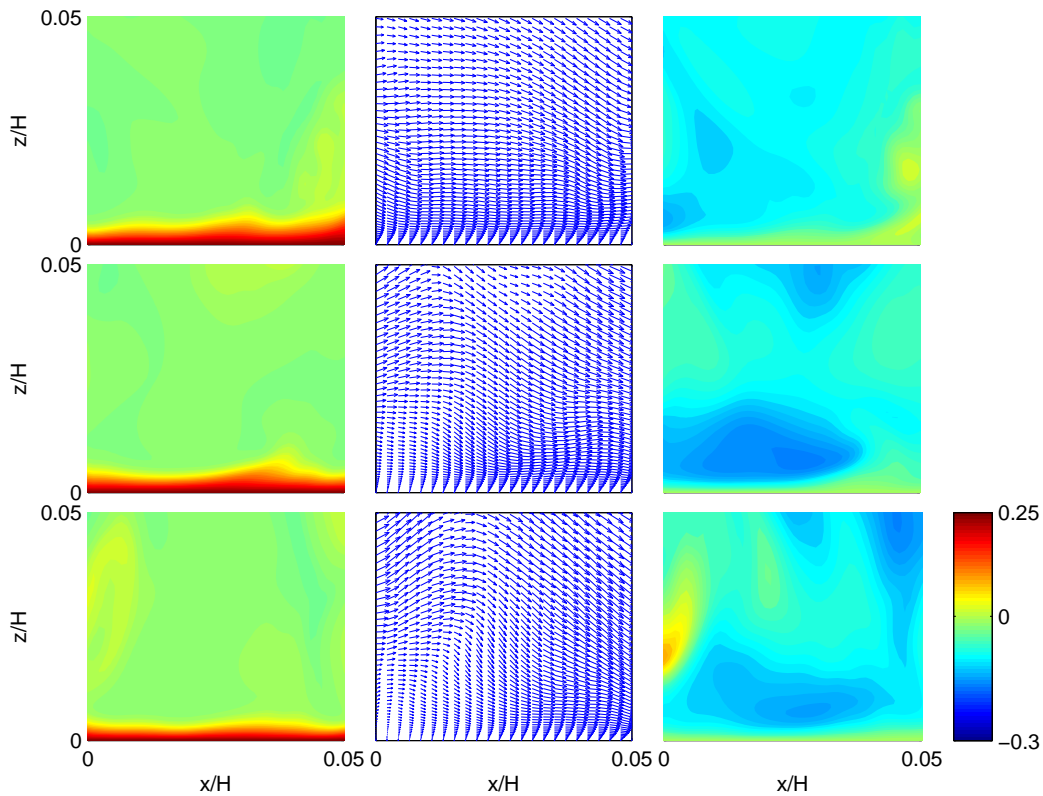


Abbildung 5.7: Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”). Die erste Spalte zeigt die Konturen der Temperatur T , die zweite zeigt ein Vektor-Diagramm von (u_r, u_z) und die dritte zeigt Konturen von u_ϕ . Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^{10}$, wobei $\delta_T/H = 0.0026$. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

gende Verhalten in der Nähe der Wand. In der Plumeablösungsphase ändert diese Geschwindigkeitskomponente das Vorzeichen beim Bewegen vorwärts in der Zeit von dem Schnappschuss 1 zu 9. Aber das ist nicht der Fall in der Relaminarisierungsphase. Die Unterschiede zwischen der Temperatur für beide Phasen sind ausgeprägter im Vergleich zu der kleineren Rayleighzahl.

Die zeitlichen Verzögerungen der beiden Phasen wurden wie folgt berechnet. Hier wurden das radial gemittelte Temperaturfeld bei $z \approx 5\delta_T$ für jeden Schnappschuss im Fenster genommen. Wenn dieser Wert eine mittlere Temperatur überschreitet, ist es der Plumeablösungsphase zugeordnet, sonst gehört es zur Relaminarisierungsphase. Durch die Anwendung dieses einfachen Verfahrens konnte die Zeitreihe digitalisiert werden. 1 bedeutet Plumeablösungsphase und 0 bedeutet Relaminarisierungsphase. Die daraus resultierende Sprungfunktion hat kürzere und längere Zeiträume für beide dynamische Bausteine. Die mittlere Zeit der beiden Phasen ist etwa gleich und ca. $0.45T_f$ für $Ra = 3 \times 10^9$, wo es eine ausreichend lange Zeitreihe gibt. Das wurde in Abbildung 5.8 gezeigt. Abb. 5.8 (a) zeigt radial gemittelte Temperaturprofile bei $z \approx 5\delta_T$ für alle Schnappschüsse im Fenster. Abb. 5.8 (b) stellt die resultierende Sprungfunktion der digitalisierten Zeitreihe dar.

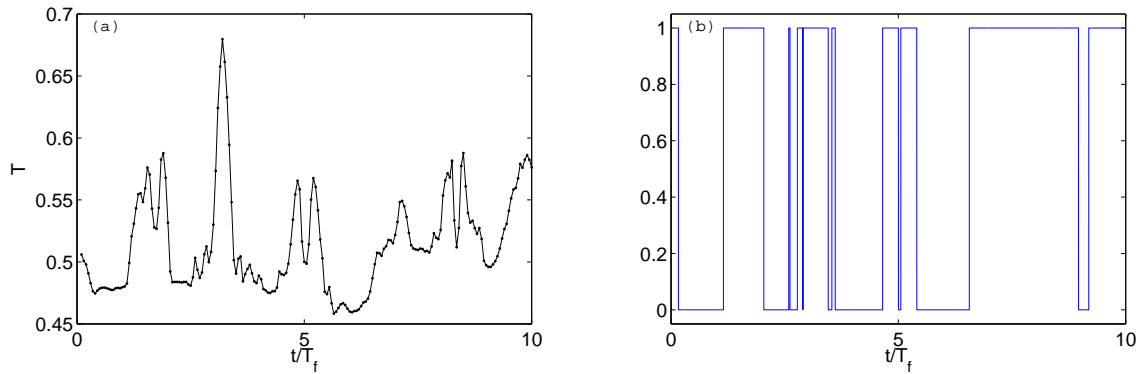


Abbildung 5.8: Radial gemittelte Temperaturprofile bei $z \approx 5\delta_T$ für jede Schnappschüsse im Fenster (a) und die resultierende Sprungfunktion der digitalisierten Zeitreihen (b). Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$.

In den Abbildungen 5.9 und 5.10 wurde nun versucht, die zeitlich gemittelten Profile der kurzen dynamischen Sequenzen mit den Vorhersagen aus der Grenzschichttheorie der gemischten Konvektion mit der ersten Ordnung von Störung in Einklang zu bringen. Die Abb. 5.9 ist für die Plumeablösungsphase. Die rote Linie ist ein zeitlich gemitteltes Profil, das aus den zeitlichen Mittelwerten aus Abb. 5.3 (linke Spalte) berechnet wurde. Die Daten sind die gleichen wie in Abb. 5.2 und Abb. 5.3 (linke Spalte). Die blau und grün gestrichelten Linien sind Profile mit unterschiedlichen Störungsparametern für die erste Ordnung der Störungserweiterung für rein erzwungene und natürliche Konvektion. Die Abb. 5.10 ist für die Relaminarisierungsphase. Die grüne Linie ist ein zeitlich gemitteltes Profil, das aus den zeitlichen Mittelwerten aus Abb. 5.3 (rechte Spalte) berechnet wurde. Die Daten entsprechen denen aus Abb. 5.3 (rechte Spalte) und Abb. 5.4.

Die Profile zeigen wieder die Eigenschaften, die in der ursprünglichen Zeitreihenanalyse über wesentlich längere Zeiträume gefunden wurden. Allerdings kann man jetzt feststellen, dass der langsamere Anstieg des Temperaturprofils deutlich hinter der Plumeablösungsphase liegt. Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für die Geschwindigkeitsprofile in der Relaminarisierungsphase. Das lokale dynamische Verhalten deutet an, dass die dreidimensionale großskalige Zirkulation das Verhalten der Grenzschicht beeinflusst. Von der Oberseite des Beobachtungsfensters wird beobachtet, was zu großen Variationen der Geschwindigkeitsprofile führt. Diese Variationen erreichen die gleiche Größenordnung wie in der Plumeablösungsphase und manifestieren sich in den Abweichungen des Geschwindigkeitsprofils $\langle u_r \rangle_r$ in der Beobachtungsebene (siehe Abb. 5.10). Hier wurde gezeigt, dass die Simulationsdaten Elemente der erzwungenen und natürlichen Konvektion kombinieren. Weder in der Plumeablösungsphase noch in der Relaminarisierungsphase lassen sich jedoch die theoretischen Profile von Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder perfekt an die Daten anpassen. Die Dynamik in der Nähe der Wände ist immer dreidimensional.

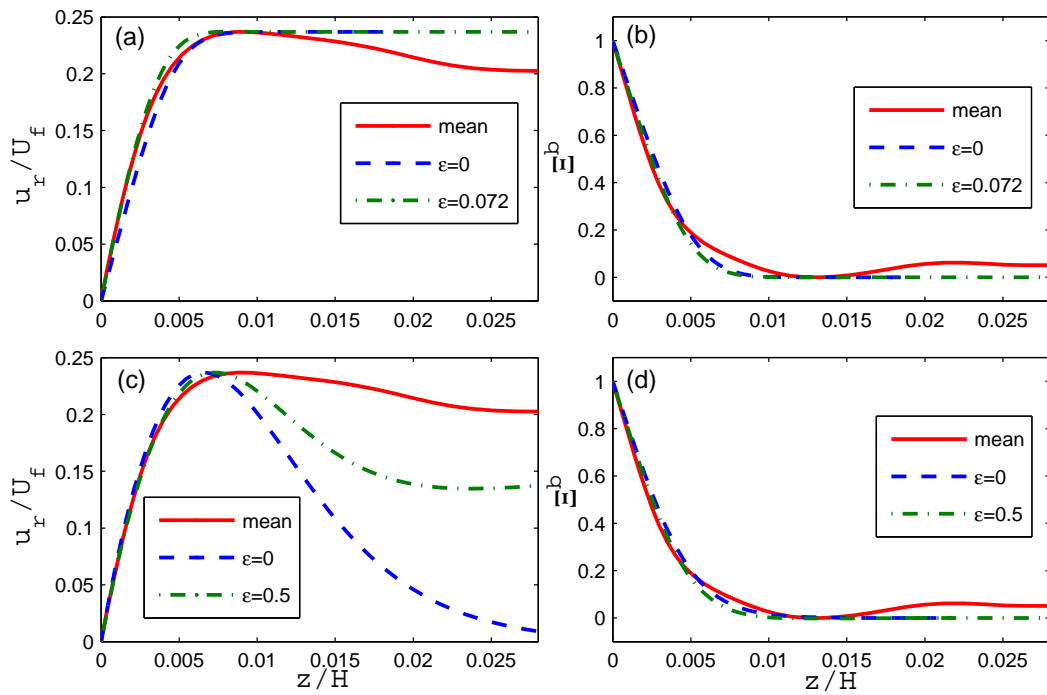


Abbildung 5.9: Anpassung der zeitlich gemittelten Profile der Plumeablösungsphase mit den Vorhersagen der Grenzschichtanalyse. Die Daten sind mit rein erzwungener und natürlicher Konvektion sowie mit einer entsprechend ersten Ordnung von Störungserweiterung verglichen. (a) Radialgeschwindigkeit in Einheiten von U_f für erzwungene Konvektion. (b) Skalierte Temperatur für erzwungene Konvektion. (c) Radialgeschwindigkeit in Einheiten von U_f für natürliche Konvektion. (d) Skalierte Temperatur für natürliche Konvektion. Die Daten sind die gleichen wie in Abb. 5.2 und Abb. 5.3 (linke Spalte). Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

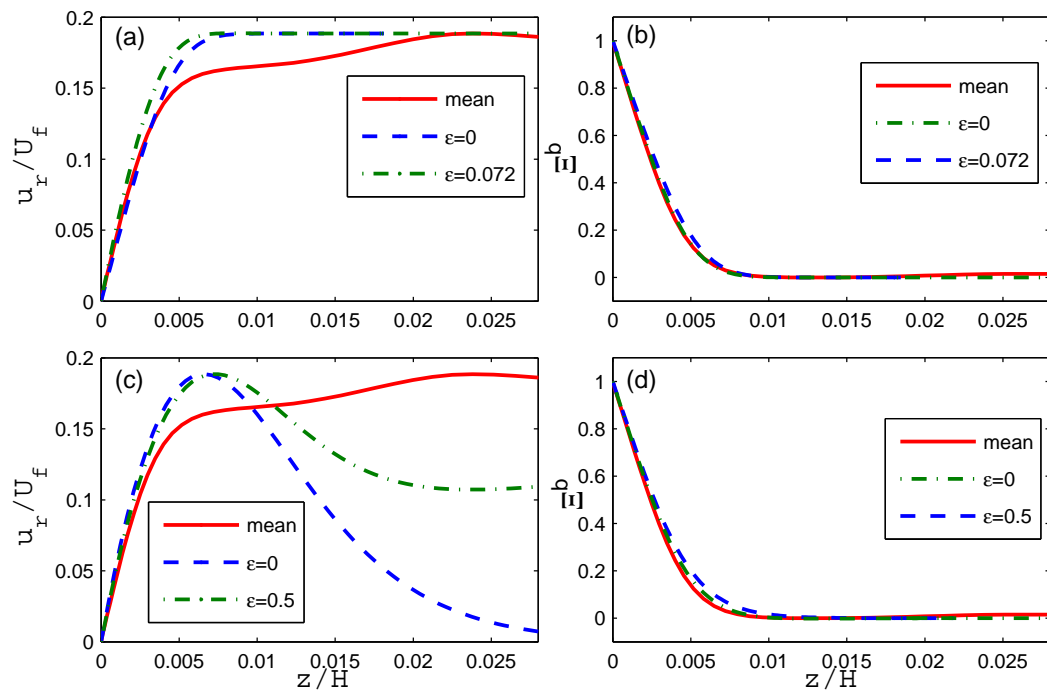


Abbildung 5.10: Anpassung der zeitlich gemittelten Profile der Relaminarisierungsphase mit den Vorhersagen der Grenzschichtanalyse. Die Daten sind mit rein erzwungener und natürlicher Konvektion sowie mit einer entsprechend ersten Ordnung von Störungserweiterung verglichen. (a) Radialgeschwindigkeit in Einheiten von U_f für erzwungene Konvektion. (b) Skalierte Temperatur für erzwungene Konvektion. (c) Radialgeschwindigkeit in Einheiten von U_f für natürliche Konvektion. (d) Skalierte Temperatur für natürliche Konvektion. Die Daten entsprechen denen von Abb. 5.3 (rechte Spalte) und Abb. 5.4. Die Abbildung ist aus Shi, Emran & Schumacher (2012).

6 Direkter Vergleich mit Zeitreihen aus den Experimenten im Ilmenauer Fass

In der Rayleigh-Bénard-Konvektion gibt es kaum einen direkten Vergleich zwischen Simulation und Experiment. Hier wird der erste direkte Vergleich zwischen Simulation und Experiment in turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion vorgestellt. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der direkten numerischen Simulation (DNS) mit den Messwerten vom Ilmenauer Fass von Li et al. (2012) bei der turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion in Luft bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} und $\Gamma = 1$ verglichen. Zuerst werden die mittleren horizontalen und vertikalen Geschwindigkeiten in der Mitte bzw. ihre entsprechend Standardabweichungen von DNS und Experiment direkt verglichen. Dann werden die Temperaturmessungen in der Mitte von Experiment mit den von DNS verglichen. Hier werden auch die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile mit den klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen verglichen. Danach werden viskose und thermische Grenzschichtdicken von DNS und Experiment untersucht für die beiden Rayleighzahlen. Schließlich werden die Grenzschicht an Punkten abseits der Zentrumslinie in DNS und Experiment analysiert.

6.1 Geschwindigkeitsfeld an der Zentrumslinie

Bei $Ra = 3 \times 10^9$ und 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$ wurden die Simulationsergebnisse des Geschwindigkeitsfeldes mit den Experimenten im Ilmenauer Fass von Li et al. (2012) verglichen. Die Zeitreihen der turbulenten Größen entlang eindimensionaler Probenfelder wurden für verschiedene Höhen von z in der Zelle genommen. Das heißt, die Zeitreihe besteht aus drei Geschwindigkeitskomponenten und einer Temperatur an einem bestimmten Punkt (r, ϕ, z) in der Zelle, dann werden die zeitlichen Mittelwerte berechnet und die Messung für verschiedene Höhen von z wiederholt. In den direkten numerischen Simulationen werden solche Zeitreihen gleichzeitig berechnet. Für $Ra = 3 \times 10^9$ gibt es in DNS vier Probenfelder mit jeweils 40 Messpunkten. Sie wurden in die Zelle platziert, um die vollständigen Zeitreihen der drei Geschwindigkeitskomponenten und die Temperatur verfolgen zu können. Neben dem Probenfeld auf der Zentrumslinie befinden sich die Probenfelder 1, 2 und 3 auf einem Kreis mit dem Radius $r = 0.88R$ und $\varphi = 0, \pi$ und $3\pi/2$, siehe Abb. 6.1. Dieser Aufbau ist in Übereinstimmung mit der Anordnung im Ilmenauer Fass. Für $Ra = 3 \times 10^{10}$ wurden 4×100 Proben genommen. Die

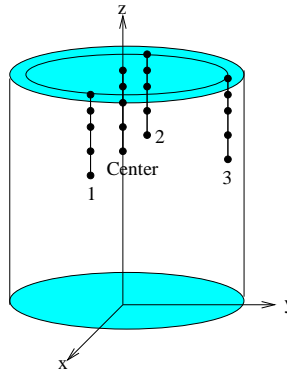


Abbildung 6.1: Skizze der vier Probenfelder mit Messstellen. Das Probenfeld in der Position vom Zentrum befindet sich auf der Mittellinie. Probenfelder 1, 2 und 3 sind bei $r = 0.88R$ und $\varphi = 0, \pi$ und $3\pi/2$ angeordnet.

Details von Geschwindigkeits- und Temperaturmessungen im Ilmenauer Fass wurden in Li et al. (2012) dargestellt.

Wegen der willkürlichen und schwankenden Ausrichtung der großskaligen Zirkulation (LSC) in der zylindrischen Zelle (Resagk et al. 2006), wurde erneut die Größe der horizontalen Geschwindigkeit untersucht (siehe Kapitel 4). Die horizontale Geschwindigkeit ist definiert als

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad (6.1)$$

wobei u_x und u_y die Geschwindigkeiten in x- und y-Richtung sind. Die mittlere horizontale Geschwindigkeit ist $\langle U(z) \rangle$. Das Symbol $\langle \cdot \rangle$ steht für einen Mittelwert über den Zeitreihen.

Zuerst wurden die mittleren horizontalen Geschwindigkeitsprofile an der Mittellinie zwischen DNS und dem Experiment für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ verglichen. In Abb. 6.2 (a) wurden die mittleren horizontalen Geschwindigkeitsprofile an der Mittellinie zwischen DNS und Experiment für $Ra = 3 \times 10^9$ dargestellt. Die Abb. 6.2 (b) zeigt die mittleren horizontalen Geschwindigkeitsprofile an der Mittellinie für $Ra = 3 \times 10^{10}$. Die experimentellen mittleren Geschwindigkeitsprofile für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ werden als geschlossene Kreise und die entsprechenden DNS-Ergebnisse als offene Kreise gezeichnet. Sie werden durch die maximale mittlere Geschwindigkeit normiert. Dabei stellen die Insets die Details im wandnahen Bereich dar. Zusätzlich ist die Prandtl-Blasius-Lösung der zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen in Schlichting (1957) dargestellt. Hier ist deutlich zu sehen, dass die gemessenen und numerischen mittleren Geschwindigkeitsprofile gut miteinander für beide Rayleighzahlen übereinstimmen. Im Falle von $Ra = 3 \times 10^9$ zeigen beide mittlere Geschwindigkeitsprofile einen linear ansteigenden Anteil des Profils (siehe Abb. 6.2 (a)). Sie haben eine maximale Differenz von 9% in der Höhe, die der Grenzschichtdicke entspricht.

Es wurde bereits in früheren Untersuchungen von du Puits et al. (2009) festgestellt, dass das Prandtl-Blasius-Profil keine gute Näherung an die gemessenen Profile der mittleren horizontalen Geschwin-

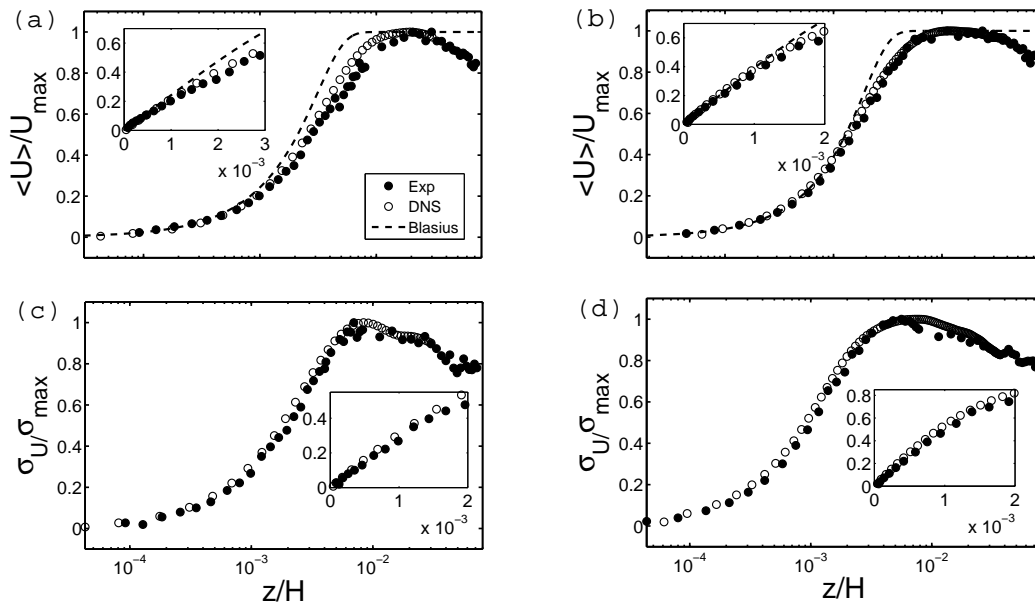


Abbildung 6.2: Profile der mittleren horizontalen Geschwindigkeit (a, b) an der Mittellinie und ihre Standardabweichung (c, d) von Experiment (geschlossene Kreise) und DNS (offene Kreise) für $Ra = 3 \times 10^9$ (a, c) und $Ra = 3 \times 10^{10}$ (b, d). Die gestrichelten Linien in (a) und (b) stellen das Geschwindigkeitsfeld einer laminaren ebenen Plattengrenzschicht nach Prandtl-Blasius-Lösung von Schlichting (1957) dar. Die Insets zeigen die wandnahen Bereiche der Grenzschicht. Die Abbildung ist aus Li et al. (2012).

digkeit in turbulenter RB Konvektion bietet. Diese Messungen waren zwischen $Ra = 3 \times 10^{11}$ und $Ra = 3 \times 10^{12}$.

In der vorliegenden Arbeit sind die Ergebnisse durch niedrigere Rayleighzahlen von $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ gewonnen worden. In den Insets von Abb. 6.2 (a) & (b) ist deutlich zu sehen, dass in beiden Fällen die wandnahen Teile der Profile nahezu linear steigen und mit der Prandtl-Blasius-Lösung übereinstimmen. Anschliessend beginnen die Profile von der theoretischen Vorhersage der laminaren Scherschicht langsam abzuweichen. Insbesondere für die Geschwindigkeit bei kleinen Rayleighzahlen ist dies deutlich zu sehen. Daraus ist zu schließen, dass das Blasius-Profil die Profile der mittleren horizontalen Geschwindigkeit in turbulenter RB Konvektion für die Rayleighzahlen nicht perfekt beschreiben kann, die für die Messungen und Simulationen gelten. In den eindimensionalen Messungen zeigt sich folglich das gleiche Ergebnis wie in den Untersuchungen im Kapitel 4.

Die Standardabweichung der horizontalen Geschwindigkeit an der Mittellinie $\sigma_U(z)$ ist in Abb. 6.2 (c) & (d) dargestellt. Die Profile werden durch ihre maximalen Werte normiert. Der Vergleich der Daten mit $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit Ausnahme von einem plötzlichen Abfall (du Puits et al. 2007a für eine detaillierte Diskussion) in dem gemessenen Profil bei $Ra = 3 \times 10^{10}$. Das lokale Maximum des Profils ist für beide Stellen bei etwa dem gleichen Abstand von der Wand, obwohl die Grenzschicht dünner wird. Auch hier scheint die Vereinbarung zu

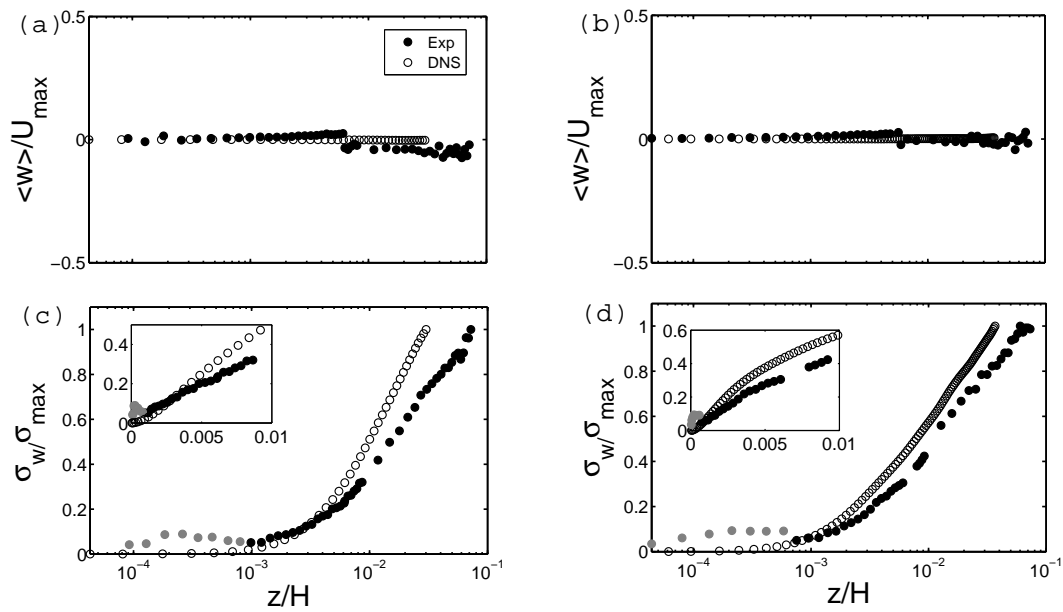


Abbildung 6.3: Profile der mittleren vertikalen Geschwindigkeitskomponente (a, b) an der Mittellinie und ihre Standardabweichung (c, d) von dem Experiment (geschlossene Kreise) und der DNS (offene Kreise) für $Ra = 3 \times 10^9$ (a, c) und $Ra = 3 \times 10^{10}$ (b, d). Die Insets zeigen den wandnahen Bereich der Grenzschicht. Die Abbildung ist aus Li et al. (2012).

einer leichten Verbesserung für die größere Rayleighzahl.

Die Abb. 6.3 (a) zeigt die mittleren Profile der vertikalen Geschwindigkeitskomponente an der Mittellinie zwischen DNS und Experiment für $Ra = 3 \times 10^9$. In Abb. 6.3 (b) wurden die mittleren Profile der vertikalen Geschwindigkeitskomponente an der Mittellinie für $Ra = 3 \times 10^{10}$ dargestellt. Die mittlere vertikale Geschwindigkeit ist $\langle w(z) \rangle$. Das Symbol $\langle \cdot \rangle$ steht für einen Mittelwert über die Zeitreihen. Die experimentellen mittleren Geschwindigkeitsprofile für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ werden als geschlossene Kreise und die entsprechenden DNS-Ergebnisse als offene Kreise gezeichnet. Die gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen Daten und DNS-Daten bedeutet, dass bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ die mittleren vertikalen Geschwindigkeiten auf Null konvergieren. Das heißt, es gibt keine mittlere vertikale Geschwindigkeit. Es ist zu beachten, dass dies jedoch im Gegensatz zu den klassischen Prandtl-Blasius-Lösungen für eine inkompressible Flüssigkeit ist, die in einen vertikalen Geschwindigkeitsprofil aufgrund des Verdrängungseffekts der Grenzschicht resultieren. Der Mittelwert der vertikalen Geschwindigkeitsprofile ist hier Null.

In Abb. 6.3 (c) und (d) wurden die Standardabweichungen der vertikalen Geschwindigkeit an der Mittellinie $\sigma_w(z)$ dargestellt. Die Profile werden durch ihre Maximalwerte normiert. Es ist deutlich zu sehen, dass die Standardabweichungen der vertikalen Geschwindigkeit $\sigma_w(z)$ ungleich Null in Wandnähe sind. Im Vergleich mit den Standardabweichungen der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten nehmen hier die Schwankungen der vertikalen Geschwindigkeitskomponenten weiter zu. Die Profile der Stan-

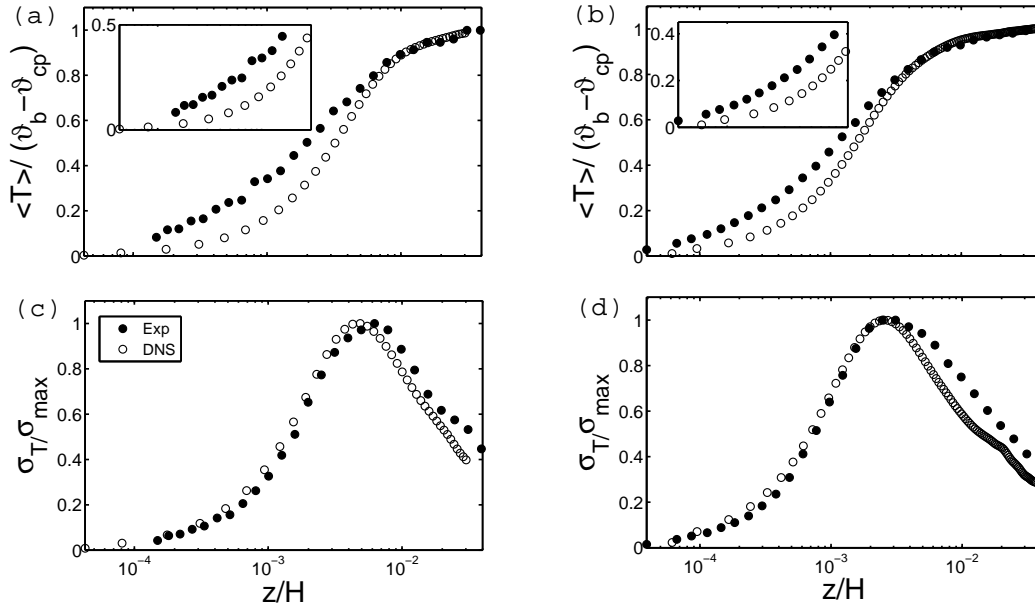


Abbildung 6.4: Profile der mittleren Temperatur (a, b) an der Mittellinie und ihre Standardabweichung (c, d) vom Experiment (geschlossene Kreise) und von der DNS (offene Kreise) für $Ra = 3 \times 10^9$ (a, c) und $Ra = 3 \times 10^{10}$ (b, d). Die Insets zeigen den wandnahen Bereich der Grenzschicht. ϑ_b ist die mittlere “bulk” Temperatur und ϑ_{cp} die Oberflächentemperatur der Kühlplatte. Die Abbildung ist aus Li et al. (2012).

Standardabweichungen von den vertikalen Geschwindigkeitskomponenten aus dem Experiment und der DNS sind nahe Null für beiden Rayleighzahlen im Bereich $0 < z/H < 10^{-3}$, das ist also weit innerhalb der Grenzschicht. Für $z/H > 10^{-3}$ steigen die Standardabweichungen $\sigma_w(z)$ stark an.

6.2 Temperaturfeld an der Zentrumslinie

Nach der Diskussion der mittleren Profile der Geschwindigkeitskomponenten, komme ich nun zu den mittleren Temperaturprofilen $\langle T(z) \rangle$. Wie in der vorherigen Beschreibungen, steht auch hier das Symbol $\langle \cdot \rangle$ für einen Mittelwert über die Zeitreihen. Die mittleren Temperaturprofile sind durch die Temperaturdifferenz zwischen “bulk” und Kühlplatte normiert. In Abb. 6.4 (a) wurden die mittleren Temperaturprofile an der Mittellinie zwischen Simulation und Experiment für $Ra = 3 \times 10^9$ dargestellt. Die Abb. 6.4 (b) zeigt die mittleren Temperaturprofile an der Mittellinie für $Ra = 3 \times 10^{10}$. Die experimentellen mittleren Temperaturprofile für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ werden als geschlossene Kreise und die entsprechenden DNS-Ergebnisse als offene Kreise gezeichnet.

Es ist zu sehen, dass die Übereinstimmung der mittleren Temperaturprofile zwischen der Messung und den numerischen Daten nicht so perfekt wie für die Geschwindigkeitsdaten ist, aber sie ist immer noch zufriedenstellend gut. Insbesondere zeigt das gemessene mittlere Temperaturprofil vom Ilmenauer Fass nicht den linearen Trend wie in den DNS-Daten in der viskosen Schicht. Eine sehr detaillierte Ansicht

in der Nähe der Plattenoberfläche zeigt jedoch, dass sich die gemessenen Temperaturgradienten an der Wand $d\langle T(z) \rangle / dz|_{z=0}$ deutlich höher als die von den DNS-Daten (siehe Insets von Abb. 6.4 (a) und (b)) sind. Die gemessenen Gradienten an der Wand vom Ilmenauer Fass übertrifft die von den DNS-Daten um den Faktor 2.5 bei $Ra = 3 \times 10^9$ und um den Faktor von 1.5 bei $Ra = 3 \times 10^{10}$. Das heißt, der lokale Wärmefluss im Experiment ist 2.5 (1.5) fach größer als der in der DNS. Derzeit lässt sich dieser Unterschied leider nicht schlüssig erklären. Die experimentellen Temperaturmessungen unterscheiden sich auch zu anderen Messungen in RB Konvektion bei Lui & Xia (1998) bzw. Belmonte et al. (1994) und anderen DNS-Ergebnisse bei Zhou & Xia (2010) bzw. Scheel et al. (2012).

Erneut wurde auch untersucht, ob die mittleren Temperaturprofile, sowohl aus Simulation, als auch aus den Messungen mit der Vorhersage von Pohlhausen (1921) übereinstimmen. Beide Temperaturprofile weichen von der Pohlhausen-Lösung ab. Im Paper von Shi, Emran & Schumacher (2012) (siehe Kapitel 5) wird gezeigt, dass ein Grund für diese Abweichungen, die ständigen Ablösung von Fragmenten der thermischen Grenzschicht in die “bulk”, die sogenannte thermische Plume, ist.

Die Abb. 6.4 (c) und (d) stellen die Standardabweichung der mittleren Temperaturprofile an der Mittellinie $\sigma_T(z)$ dar. Sie sind normiert durch ihre maximale Amplitude. Es ist ersichtlich, dass sie den gleichen Trend zwischen Simulation und Experiment in beiden Rayleighzahl haben. Bei $Ra = 3 \times 10^9$ haben die Temperaturschwankungen 10% - 20% Unterschied zwischen Experiment und DNS von einander, bevor sie sich ihren maximalen Schwankungen nähern; bei größeren Entfernungen von der Wand wird die Differenz zwischen Experiment und DNS kleiner zu etwa 5%. Bei $Ra = 3 \times 10^{10}$ stimmen die Schwankungen zwischen Experiment und DNS miteinander überein, vor allem bis zur maximalen Schwankung. Für größere z beträgt der Unterschied von Experiment zur DNS etwa 10%.

6.3 Skalierungsgesetze in der Grenzschicht

6.3.1 Viskose und thermische Grenzschichtdicken

Hier wurde die Skalierungsanalyse der lokalen Grenzschichtdicke in Bezug auf die Rayleighzahl diskutiert. Zuerst wurden die Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode (“displacement method”) analysiert. Die Verdrängungsdicke der Grenzschicht (“displacement thicknesses”) für die horizontale Geschwindigkeit U und die Temperatur T sind wie folgt definiert (Pope 2000):

$$\delta_{v,d} = \int_0^\infty \left[1 - \frac{\langle U(z) \rangle}{U_{max}} \right] dz, \quad (6.2)$$

$$\delta_{\theta,d} = \int_0^\infty \left[1 - \frac{\langle T(z) \rangle - \vartheta_{cp}}{\vartheta_b - \vartheta_{cp}} \right] dz. \quad (6.3)$$

wobei ϑ_b und ϑ_{cp} die mittlere “bulk” Temperatur und die Oberflächentemperatur der Kühlplatte sind. Das Integral wurde numerisch durch eine Trapezregel berechnet.

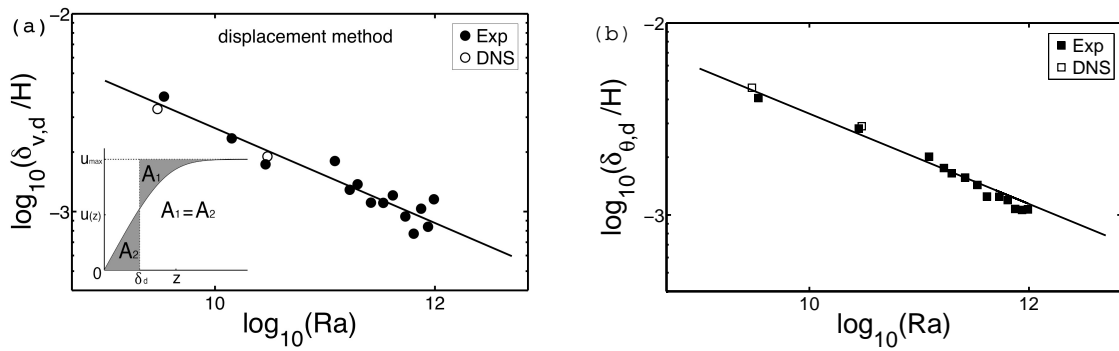


Abbildung 6.5: Verdrängungsdicke der viskosen (a) und thermischen (b) Grenzschicht gegenüber Rayleighzahl. Experimentelle Ergebnisse sind geschlossene Symbole und DNS-Daten offene Symbole angezeigt worden. Die durchgezogenen Linien in jedem Diagramm entsprechen der Gesetze $\delta_{v,d}/H = 0.66 Ra^{-0.24}$ und $\delta_{\theta,d}/H = 0.76 Ra^{-0.24}$. Die Abbildung ist aus Li et al. (2012).

Die Abb. 6.5 (a) und (b) stellen die viskose und thermische Grenzschichtdicke durch die Verdrängungsmethode im Vergleich zu den entsprechenden Rayleighzahlen in einem Bereich zwischen $Ra = 10^9$ bis 10^{12} dar. Die experimentellen Datenpunkte bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$ sind aus den Arbeiten von Li et al. (2012) und die anderen experimentellen Datenpunkte bei den höheren Rayleighzahlen sind aus früheren Arbeiten von du Puits et al. (2007b, 2009). Im Inset der Abb. 6.5 (a) wurde die Verdrängungsmethode skizziert.

Die Graphiken wurden in doppelt logarithmischen Achsen eingetragen, so dass eine möglichst algebraische Skalierung sofort sichtbar wird. Die viskose und thermische Grenzschichtdicken von Experiment von Li et al. (2012) wurden durch die konstante Höhe der zylindrischen Zelle $H = 2.55m$ und für die früheren Daten von du Puits et al. (2007b, 2009) durch die Höhe $H = 6.03m$ normiert. Aus Abb. 6.5 (a) und (b) ist erkennbar, dass die gemessenen Werte von viskosen und thermischen Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode perfekt mit den Daten aus der DNS übereinstimmen.

In Tabelle 6.1 listet die viskosen und thermischen Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode zwischen DNS und Experiment für verschiedene Rayleighzahlen bei $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$.

Ra	$\delta_{v,d}/H(\text{DNS})$	$\delta_{\theta,d}/H(\text{DNS})$	$\delta_{v,d}/H(\text{EXP})$	$\delta_{\theta,d}/H(\text{EXP})$
3×10^9	0.00330	0.00460	0.00381	0.00416
3×10^{10}	0.00190	0.00290	0.00173	0.00288

Tabelle 6.1: Viskose und thermische Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode $\delta_{v,d}$ und $\delta_{\theta,d}$ zwischen DNS und Experiment für verschiedene Rayleighzahlen bei $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$. Die experimentellen Daten sind von Li et al. (2012).

Die experimentellen Daten aus der bisherigen Arbeit wurden nach den Gesetzen $\delta_{v,d}/H = C_{1,d} Ra^\beta$

und $\delta_{\theta,d}/H = C_{2,d} Ra^\gamma$ berechnet. Als Ergebnis konnten die Vorfaktoren und die Exponenten $C_{1,d} = 0.66 \pm 0.51$, $C_{2,d} = 0.76 \pm 0.33$, $\beta = -0.24 \pm 0.03$ und $\gamma = -0.24 \pm 0.02$ ermittelt werden.

In Tabelle 6.2 sind die Exponenten nach der Skalierungsgesetze von numerischen Simulationen und Experimenten aufgelistet.

Gruppe	Ra	Pr	Γ	β	γ
Numerische Simulation					
Aktuelle Arbeit (2012)(d)	$10^8 - 10^{10}$	0.7	1	-0.24 ± 0.03	-0.24 ± 0.02
Aktuelle Arbeit (2012)(s)	$10^8 - 10^{10}$	0.7	1	-0.24 ± 0.03	-0.266 ± 0.01
Scheel et al. (2012)	$10^5 - 10^8$	0.7 & 0.4	1	-0.18 ± 0.01	-0.25 ± 0.01
Wagner et al. (2012)	$10^4 - 10^9$	0.786	1	-0.238 ± 0.009	-0.285 ± 0.003
Stevens et al. (2011)	$10^7 - 10^{12}$	0.7	1/2	-0.28	-0.29
Verzicco et al. (2008)	$10^6 - 10^{12}$	0.7	1/2	—	-1/3
Van Reeuwijk et al. (2008a)	$10^5 - 10^8$	1	4	-0.13	-0.27
Verzicco et al. (1999)	$10^5 - 10^8$	0.7	1	-0.23	-0.29
Experiment					
Li et al. (2012)(d)	$10^9 - 10^{12}$	0.7	1	-0.24 ± 0.03	-0.24 ± 0.02
Li et al. (2012)(s)	$10^9 - 10^{12}$	0.7	1	-0.24 ± 0.03	-0.24 ± 0.01
Du Puits et al. (2007b)	$10^9 - 10^{12}$	0.7	1.13	—	-0.2540
Xin et al. (1996)	$10^8 - 10^{10}$	7	1	-0.16 ± 0.02	-0.29
Belmonte et al. (1994)	$10^7 - 10^{11}$	0.7	1	—	-0.29

Tabelle 6.2: Vergleich der Exponenten nach der Skalierungsgesetze von numerischen Simulationen und Experimenten. β bezeichnet die Exponent nach der Skalierungsgesetze für δ_v . γ ist die Exponent nach der Skalierungsgesetze für δ_θ . d=“displacement method” und s=“slope method”.

Aus Tabelle 6.2 ist erkennbar, dass unser erhaltener Exponent β gleich zu anderen numerischen Simulationen z. B. $\beta = -0.238$ bei $Pr = 0.786$ bei Wagner et al. (2012) ist. Unser erhaltener Exponent γ ist sehr ähnlich mit den numerischen Simulationen z. B. $\gamma = -0.25$ bei $Pr = 0.7$ bei Scheel et al. (2012). Wir schließen daraus, dass der Unterschied zu anderen Daten aus unterschiedlichen Seitenverhältnissen und im Fall von Van Reeuwijk et al.(2008a) aus anderen RB folgen kann.

Es ist hier anzumerken, dass unsere Skalierungsgesetze die lokalen Grenzschichtdicke an der Zentrumsachse der zylindrischen Zelle beschreiben und nicht unbedingt mit der Vorhersage einer globalen Skalierung übereinstimmen müssen. Der Exponent β ist im Einklang mit der Vorhersage der globalen Exponenten nach der phänomenologischen Skalierungstheorie von Grossmann und Lohse (2000). Dagegen ist γ etwas niedriger als erwartet von der globalen Skalierung $Nu \sim Ra^{\gamma'}$. Darüber hinaus ist zu erwähnen, dass sowohl viskose und thermische Grenzschichten in etwa die gleiche Dicke aufweisen,

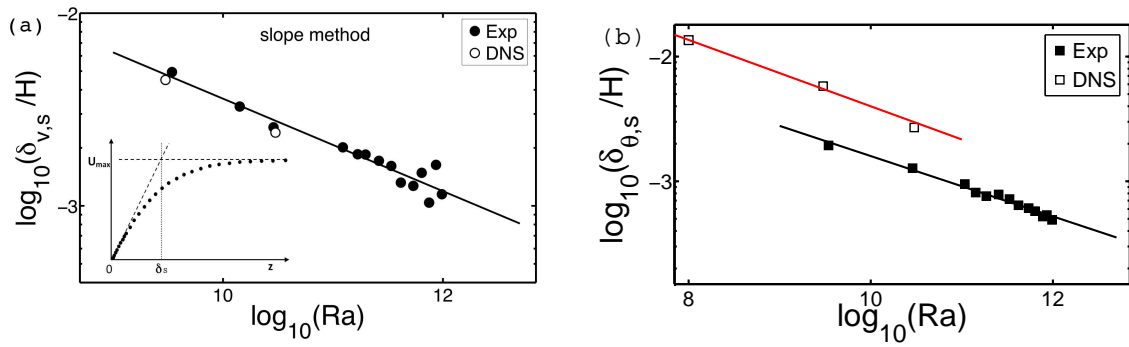


Abbildung 6.6: Viskose (a) und thermische (b) Grenzschichtdicke durch die Anstiegsmethode gegenüber Rayleighzahl. Experimentelle Ergebnisse sind geschlossene Symbole und DNS-Daten offene Symbole angezeigt worden. Die durchgezogenen schwarze Linien in jedem Diagramm entsprechen der Gesetze $\delta_{v,s}/H = 0.90 Ra^{-0.24}$ und $\delta_{\theta,s}/H = 0.42 Ra^{-0.24}$. Die durchgezogene rote Linie in (b) entspricht der Gesetze $\delta_{\theta,s}/H = 1.825 Ra^{-0.266}$. Die experimentellen Daten sind von Li et al. (2012) und du Puits et al. (2007b, 2009).

wenn die Prandtlzahl ungefähr eins ist.

Zur Analyse der Skalierung der Grenzschicht wurden die Grenzschichtdicken auch durch die Anstiegsmethode ("slope method") von Tilgner et al. (1993) berechnet. Die Anstiegsmethode basiert auf der wandnahen Gradient der Geschwindigkeits- und der Temperaturprofile. Zunächst wird der lineare Teil des mittleren Profils extrapoliert. Dann ergibt sich ein Schnittpunkt zwischen die Extrapolation und das erste lokale Maximum von diesem mittleren Profil. Von diesem Schnittpunkt erhält man die viskose bzw. thermische Grenzschichtdicke. Diese Methode ist weiter in der RB Konvektion verwendet. Im Inset der Abb. 6.6 (a) wurde das Prinzip der Anstiegsmethode skizziert.

Aus Abb. 6.6 (a) ist zu erkennen, dass die gemessenen Werte der viskosen Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode perfekt mit den Daten aus der DNS übereinstimmen. Nach den Gesetzen wurden $\delta_{v,s}/H = C_{1,s} Ra^{\beta'}$ berechnet. Als Ergebnis konnten die Vorfaktoren und die Exponenten $C_{1,s} = 0.90 \pm 1.22$ und $\beta' = -0.24 \pm 0.03$ ermittelt werden.

In Abb. 6.6 (b) ist der numerische Datenpunkt bei $Ra = 10^8$ aus den Arbeiten von Emran (2009). Hier unterscheiden sich die gemessenen thermischen Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode von den aus der DNS stark. Der Grund ist, dass die gemessenen Gradienten der Temperaturprofile vom Ilmenauer Fass an der Wand deutlich höher als die von der DNS sind. Nach den Gesetzen wurden $\delta_{\theta,s}/H = C_{2,s} Ra^{\gamma'}$ berechnet. Als Ergebnis konnten die Vorfaktoren und die Exponenten $C_{2,s} = 1.825 \pm 0.027$ und $\gamma' = -0.266 \pm 0.01$ ermittelt werden. Der erhaltener Exponent γ' von DNS unterscheidet sich von dem Experiment bei Li et al. (2012) $\gamma' = -0.24 \pm 0.01$ in Luft. Das liegt daran, dass es beim Experiment vom Ilmenauer Fass systematische Fehler bei den Temperaturmessungen geben kann.

In Tabelle 6.3 listet die viskosen und thermischen Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode zwi-

schen DNS und Experiment für verschiedene Rayleighzahlen bei $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$.

Ra	$\delta_{v,s}/H(\text{DNS})$	$\delta_{\theta,s}/H(\text{DNS})$	$\delta_{v,s}/H(\text{EXP})$	$\delta_{\theta,s}/H(\text{EXP})$
3×10^9	0.00450	0.00580	0.00494	0.00194
3×10^{10}	0.00240	0.00270	0.00256	0.00123

Tabelle 6.3: Viskose und thermische Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode $\delta_{v,s}$ und $\delta_{\theta,s}$ zwischen DNS und Experiment für verschiedene Rayleighzahlen bei $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$. Die experimentellen Daten sind von Li et al. (2012).

Aus Abb. 6.6 (a), (b) und Tabelle 6.3 ist erkennbar, dass die viskosen Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode von DNS sehr gut mit den Daten aus dem Experiment von Li et al. (2012) übereinstimmen. Aber die thermischen Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode von DNS unterscheiden sich stark von den aus dem Experiment von Li et al. (2012).

Es ist ersichtlich, dass im Vergleich zu der Verdrängungsmethode, die Anstiegsmethode die Skalierungsexponenten der viskosen Grenzschicht nicht ändert. Das heißt, dass die Exponenten der Skalengesetze für die viskose Grenzschicht sowohl durch die Verdrängungsmethode und auch durch die Anstiegsmethode gleich sind. Im Vergleich zu der Verdrängungsmethode ändern sich bei der Anstiegsmethode jedoch Skalierungsexponenten der thermischen Grenzschicht. Die Exponenten der Skalengesetze durch die Anstiegsmethode für die thermische Grenzschicht der DNS unterscheiden sich auch vom Experiment von Li et al. (2012). Die Ursache für diesen Unterschied muss wie bereits erwähnt in Zukunft weiter untersucht werden.

6.3.2 Scher-Reynoldszahl

Die Scher-Reynoldszahl ist als ein Kriterium definiert, welches den möglichen Übergang einer Grenzschicht vom laminaren zum turbulenten Zustand (Landau & Lifschitz 1987) beurteilt. Sie ist gegeben durch:

$$Re_s = \frac{\delta_v U}{\nu}, \quad (6.4)$$

wobei δ_v die viskose Grenzschichtdicke ist, U eine typische Geschwindigkeit der äußeren Geschwindigkeit ausdrückt und ν die kinematische Viskosität darstellt. Für eine isotherme Grenzschicht nach dem Modell von Prandtl-Blasius schätzen Landau und Lifschitz (1987) ein, dass ein kritischer Wert der Scher-Reynoldszahl $Re_s \approx 420$ ist. In turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion kann die Stabilität der Grenzschicht nicht nur durch die Scherspannung gestört werden, die mit zunehmender Geschwindigkeit steigt, sondern auch durch thermische Plumeablösungen aus der Grenzschicht und durch kohärente

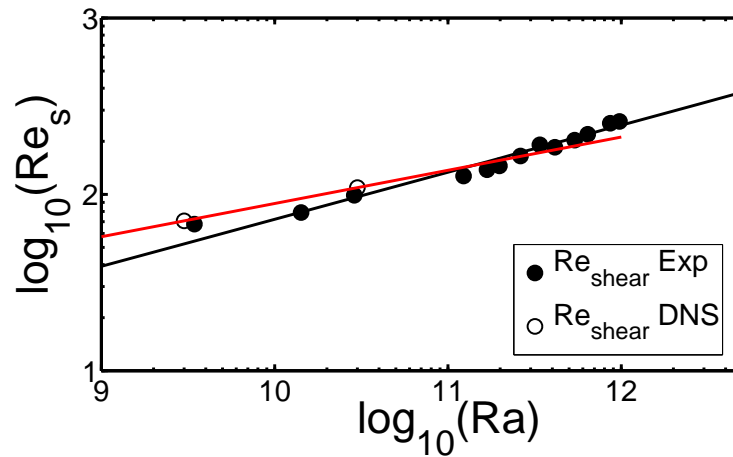


Abbildung 6.7: Scher-Reynoldszahl Re_s vom Experiment (geschlossene Kreise) und DNS (offene Kreise) gegen Rayleighzahl. Die durchgezogene rote Linie entspricht $Re_s \sim Ra^{0.1884}$. Die durchgezogene schwarze Linie ist $Re_s \sim Ra^{0.267}$. Die experimentellen Daten sind von Li et al. (2012) und du Puits et al. (2007b, 2009).

Strukturen in dem globalen Strömungsfeld. Diese Effekte können die Stabilitätsgrenze der Grenzschicht senken und können einen Übergang zu einer turbulenten Regime auch bei signifikant kleineren Re_s induzieren (z. B. Preston (1958) vorhergesagte $Re_s = 320$, Das basierte auf dem Momentum der Grenzschichtdicke).

Die Abb. 6.7 stellt die Scher-Reynoldszahl in einem Bereich zwischen $Ra = 10^9$ bis $Ra = 10^{12}$ dar. Wenn die Rayleighzahl grösser wird, so steigt Re_s ebenso. An dieser Stelle stimmen die experimentellen und numerischen Daten sehr gut überein. Um die Rayleighzahl abzuschätzen, bei der die Tendenz die kritischen Grenzen $Re_s = 320$ (Preston 1958) oder $Re_s \approx 420$ (Landau und Lifschitz 1987) kreuzt, wurden die Datenpunkte mit Hilfe der Regression extrapoliert.

Obwohl es in Abb. 6.7 nur zwei Punkte in DNS gibt, würden wir von den DNS-Daten für $Re_s \sim Ra^{0.1884}$ erhalten. Nach dieser Anpassung würde die kritische Rayleighzahl für einen Übergang zu einer turbulenten Grenzschicht bei $Ra_c \approx 9.054 \times 10^{12}$ für $Re_s = 320$ und bei $Ra_c \approx 3.834 \times 10^{13}$ für $Re_s = 420$ folgen. Das unterscheidet sich vom Experiment bei Li et al. (2012), $Re_s \sim Ra^{0.267 \pm 0.0386}$. Sie fanden, dass $Ra_c \approx 2.65 \times 10^{12}$ für $Re_s = 320$ bzw. $Ra_c \approx 7.3 \times 10^{12}$ für $Re_s = 420$ ist. Das ist auch verschieden von der Abschätzung aus den numerischen Simulationen bei Wagner et al. (2012) $Re_s = 0.072 Ra^{0.2675}$. Sie fanden, dass $Ra_c \approx 1.2 \times 10^{14}$ für $Re_s = 420$ bei $Pr = 0.786$ beträgt.

Unser Result ist leicht unter den Prognosen der Skalierungstheorie von Grossmann und Lohse (2000), sowie der neuen experimentellen Arbeiten von Funfschilling et al. (2012). Es kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass aufgrund der permanenten Plumeablösungen in den Grenzschichten, der stets dreidimensionalen Strömungen in turbulente RB Konvektion sowie der Dynamik der großskaligen Zirkulation (LSC) dieser Übergang bei noch niedrigeren Rayleighzahlen geschehen kann. Es ist auch er-

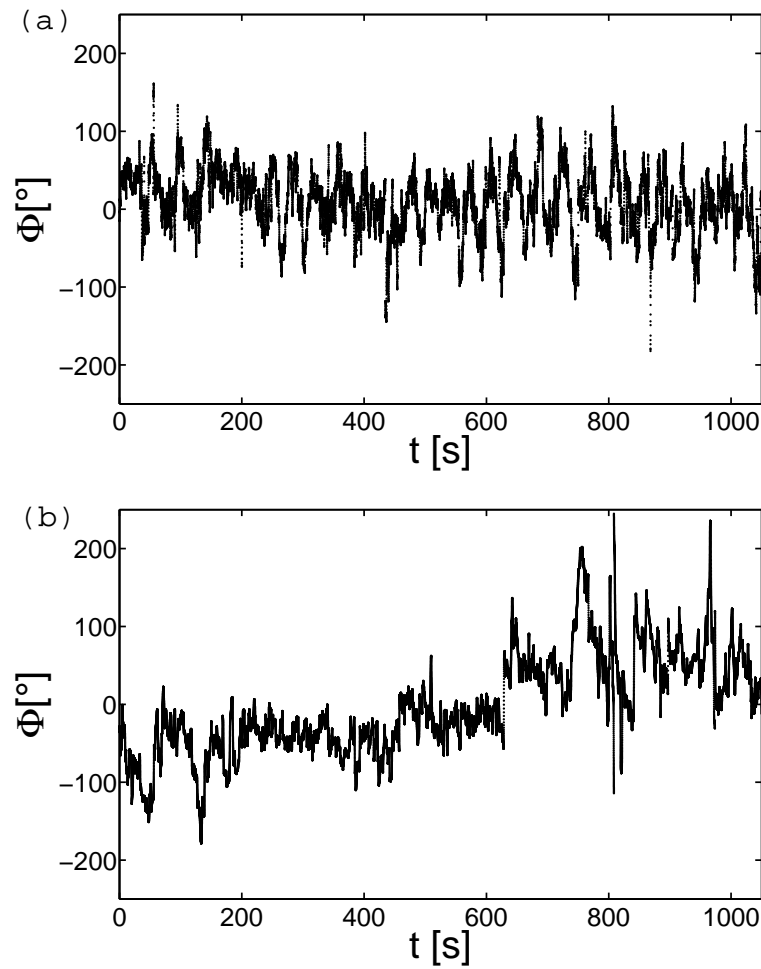


Abbildung 6.8: Ausrichtung der momentanen Winkel der horizontalen Geschwindigkeitsvektoren. (a) Experiment und (b) DNS. Die Daten sind von der Mittellinie. Die Zeit aus der DNS ist mit Hilfe der experimentellen Zeit berechnet worden. Die Abbildung ist aus Li et al. (2012).

sichtlich, dass schon aus diesen Abschätzungen ein relativ weiter Bereich von kritischen Rayleighzahlen Ra_c folgen würde.

6.4 Grenzschichtanalyse an weiteren Messpositionen

In RB Zellen mit einem Seitenverhältnis von eins ist die Beeinflussung der Grenzschicht durch die großskalige Strömung innerhalb des Gehäuses bedeutend. Daher ist die Frage berechtigt, ob die Ergebnisse von der Mitte der Kühlplatte für das gesamte Gebiet verallgemeinert werden können? Hier wurden die Messungen und numerischen Ergebnisse an drei anderen Positionen 1, 2 und 3 siehe Abb. 6.1 diskutiert. Die Positionen 1, 2 und 3 befinden sich bei $r = 0.88R$ und $\varphi = 0, \pi$ und $3\pi/2$.

Im Experiment vom Ilmenauer Fass wird für $Ra = 3 \times 10^9$ und 3×10^{10} ein kleineres Fass benutzt. Dort wurde versucht, den Wind in einer bestimmten Richtung zu führen. Die Plexiglas-Seitenwand die-

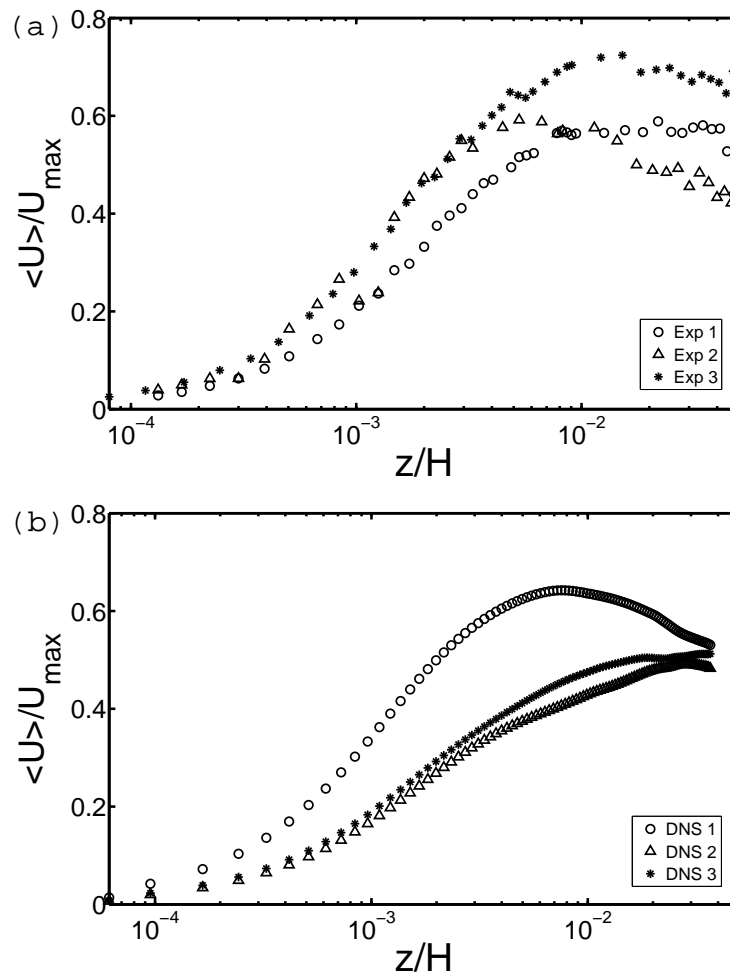


Abbildung 6.9: Mittlere horizontale Geschwindigkeitsprofile an den Positionen 1, 2 und 3. (a) Profile der gemessenen Daten vom Ilmenauer Fass für $Ra = 2.88 \times 10^{10}$ bei Seitenfenster 1 (Kreis), 2 (Dreieck) und 3 (Sterne). (b) Profile der DNS-Daten für $Ra = 3 \times 10^{10}$ bei Probenfelder 1 (Kreis), 2 (Dreieck) und 3 (Sterne). Die Abbildung ist aus Li et al. (2012).

ses Fasses ist an zwei gegenüberliegenden Punkten am größten Durchmesser etwa 1% gezogen worden. Dadurch wird der Umfang an dieser Stelle leicht elliptisch. Auf diese Weise kann die großskalige Zirkulation (LSC) in einer quasi starren vertikalen Ebene gehalten werden. Dies ermöglicht die Zuordnung der Positionen auf der Platte in drei Bereiche von Aufsteigen (Position 1) und Absinken der Plumes (Position 2), sowie außerhalb der großskaligen Zirkulation (Position 3). Diese Zuordnung ist in der DNS nicht möglich, weil der mittlere Winkel der großskaligen Zirkulationsebene langsam driftet und dadurch die unterschiedlichen Bereiche sich nicht klar definieren lassen (siehe Abb. 6.8). Wegen des unterschiedlichen Verhaltens der großskaligen Zirkulation im Experiment und in der DNS, lassen sich die Daten in diesem Abschnitt nicht direkt vergleichen.

Die Abb. 6.8 zeigt die Zeitreihen der momentanen Winkel der horizontalen Geschwindigkeitsvektoren von der Mittellinie. In Abb. 6.8 (a) wird die großskalige Zirkulation vom Experiment dargestellt. In Abb.

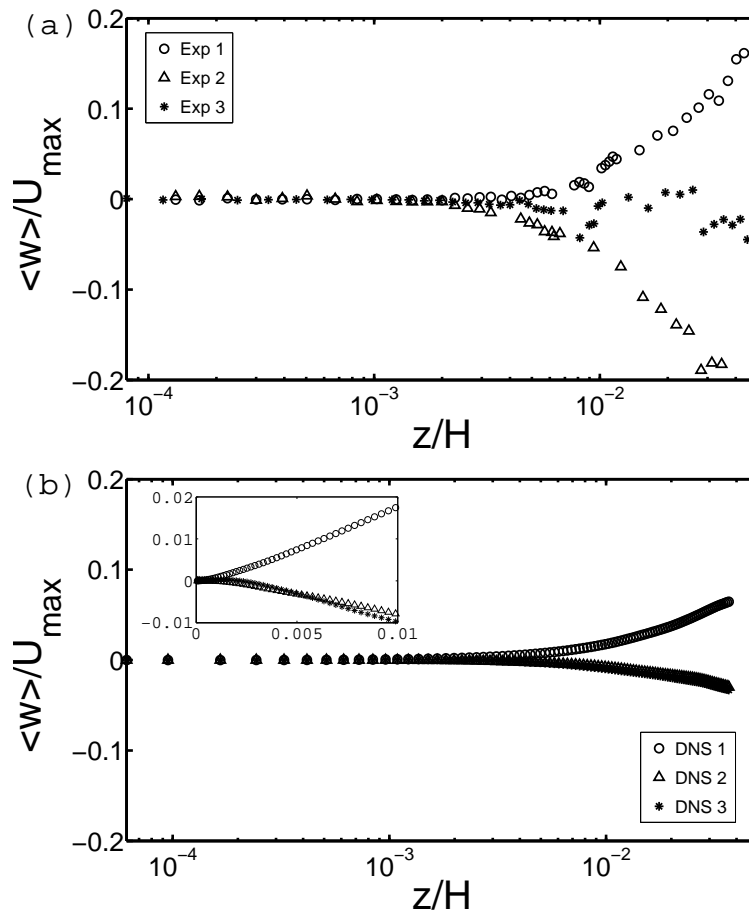


Abbildung 6.10: Mittlere vertikale Geschwindigkeitsprofile an den Positionen 1, 2 und 3. (a) Profile der gemessenen Daten vom Ilmenauer Fass für $Ra = 2.88 \times 10^{10}$ bei Seitenfenster 1 (Kreis), 2 (Dreieck) und 3 (Sterne). (b) Profile der numerischen Daten für $Ra = 3 \times 10^{10}$ für die Probenfelder 1 (Kreis), 2 (Dreieck) und 3 (Sterne). Die experimentellen Daten der oberen Abbildung sind aus Li et al. (2012).

6.8 (b) ist die Ausrichtung der großskaligen Zirkulation von der DNS zu sehen. Die Zeit aus der DNS ist mit Hilfe der experimentellen Zeit berechnet worden. Es ist deutlich zu sehen, dass eine Drehung der großskaligen Zirkulationsebene in dem Experiment durch die kleine Dehnung der Seitenwand der RB-Zelle (siehe. Abb. 6.8 a) blockiert wird, während die großskalige Zirkulationsebene in der DNS langsam driftet (siehe. Abb. 6.8 b).

Die Abbildung 6.9 (a) zeigt die experimentellen mittleren horizontalen Geschwindigkeitsprofile an den Positionen 1, 2 und 3 für $Ra = 3 \times 10^{10}$. In Abb. 6.9 (b) sind die numerischen mittleren horizontalen Geschwindigkeitsprofile an den Position 1, 2 und 3 für $Ra = 3 \times 10^{10}$ dargestellt. Um die potentielle Abweichung von den Profilen in der Mittellinie darzustellen, wird die Geschwindigkeit durch den gleichen Wert U_{max} wie in Abb. 6.2 und 6.3 normiert.

Es ist zu erkennen, dass die Maxima der Geschwindigkeit an den äußeren Positionen deutlich unter dem maximalen Wert in der Mittellinie liegt. Das impliziert eine Reduktion der lokalen Wärmeübergangs-

koeffizienten und damit eine Verringerung der lokalen Nusseltzahl. Alle drei gemessenen Profile steigen mit verschiedenen Gradienten auf ihre maximalen Werte und die viskosen Grenzschichtdicken variieren. Von Abb. 6.10 (a) ist es ersichtlich, dass die mittleren vertikalen Geschwindigkeiten vom Ilmenauer Fass an den Positionen 1 und 2 (Beginn und Ende des Wegs der großskaligen Zirkulation entlang der Kühlplatte) deutlich von Null abweichen. Das ist anders als auf der Mittellinie vom Ilmenauer Fass. Auf dem Gebiet des Aufsteigens von Plume (Position 1) wurde eine positive vertikale Geschwindigkeitskomponente gemessen, während die vertikale Geschwindigkeit im Bereich des Absinkens von Plume (Position 2) negativ ist. An der Position 3 geht die mittlere senkrechte Geschwindigkeitskomponente außerhalb der großskaligen Zirkulation gegen Null.

Vom Inset in Abb. 6.10 (b) ist es zu erkennen, dass die mittleren vertikalen Geschwindigkeiten von DNS an den Positionen 1, 2 und 3 deutlich ebenfalls ungleich Null sind. Das ist wiederum anders als auf der Mittellinie von DNS. Während die Position 1 mit positive vertikale Geschwindigkeitskomponente im Bereich des Aufsteigens von Plume liegt, befinden sich die Positionen 2 und 3 mit negative vertikale Geschwindigkeitskomponente auf dem Gebiet des Absteigens von Plume. Das unterscheidet sich vom Experiment bei Li et al. (2012).

Hier wurden die viskosen und thermischen Grenzschichtdicken an diesen drei Positionen ebenfalls berechnet (siehe Tabelle 6.4). Im Allgemeinen wird die thermische Grenzschichtdicke fast immer dicker als die viskose Grenzschichtdicke, in unserem Fall bei $Pr = 0.7$. Es wurde gefunden, dass die Grenzschichtdicken an allen vier Positionen nicht gleich und stark abhängig von der Position sind. Von der dünnsten zu der dicksten viskosen Grenzschichtdicke an allen vier Positionen in DNS gibt es einen Unterschied um einen Faktor von 3. Von der dünnsten zu der dicksten thermischen Grenzschichtdicke an allen vier Positionen in DNS gibt es einen Unterschied um einen Faktor von 1.9. Die dünnsten Grenzschichtdicke in DNS ist in der Position 1, während sie in Experiment in der Position 2 ist. Sie ist nicht in der Position vom Zentrum wie wir erwarteten.

In Tabelle 6.4 listet die viskosen und thermischen Grenzschichtdicken δ_v/H und δ_θ/H an allen vier Positionen zwischen DNS und Experiment bei $Ra = 3 \times 10^{10}$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$.

Position	$\delta_v/H(\text{DNS})$	$\delta_\theta/H(\text{DNS})$	$\delta_v/H(\text{EXP})$	$\delta_\theta/H(\text{EXP})$
Zentrum	0.00190	0.00290	0.00173	0.00288
1	0.00130	0.00200	0.00204	0.00309
2	0.00390	0.00360	0.00088	0.00241
3	0.00320	0.00380	0.00189	0.00310

Tabelle 6.4: Viskose und thermische Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode δ_v/H und δ_θ/H an allen vier Positionen zwischen DNS und Experiment bei $Ra = 3 \times 10^{10}$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$. Die experimentellen Daten sind von Li et al. (2012).

7 Prandtlzahlabhängigkeit der Grenzschicht

In diesem Kapitel werden die Grenzschichten für drei unterschiedliche Prandtlzahlen ($Pr = 7, 0.7, 0.1$) bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ analysiert. Zuerst wurden die mittleren Geschwindigkeits- und Temperaturprofile dynamisch reskaliert, wie bei Zhou & Xia (2010). Diese Profile werden erneut mit den klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen verglichen. Danach werden die Orientierung und die Amplituden der großskaligen Zirkulation (LSC) bei $z_0 = H - \delta_T$ für die obere Platte in der Konvektionszelle untersucht. Anschließend folgt eine Untersuchung der Grenzschichtdynamik in einem kleinen Beobachtungsfenster für $Pr = 7$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Dort konnten auch zwei charakteristische dynamische Sequenzen der Grenzschichtstrukturen, wie bei $Pr = 0.7$, beobachtet werden. Dabei geht es einerseits um die Plumeablösungsphase und andererseits um die Relaminarisierungsphase. Ihre entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten und Temperaturen werden analysiert und dargestellt. Dann wird mittels des λ_2 -Kriteriums die Wirbelstruktur gemeinsam mit den Stromlinien in einem momentanen Schnappschuss in der Grenzschicht analysiert und dargestellt. Schließlich werden die Temperaturfelder durch horizontale Querschnitte vom momentanen Schnappschuss in der thermischen Grenzschichtdicke und in der Mitte der Zelle untersucht und dargestellt.

7.1 Dynamisches Reskalieren für verschiedene Pr

Hier wurden das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld in einem kleinen planaren Fenster untersucht. Dieses Analysefenster ist in der Mitte der zylindrischen Zelle angeordnet und für jeden Schnappschuss mit der entsprechenden instantanen großskaligen Zirkulation bei $z = \delta_T$ ausgerichtet. Das Vorgehen ist wie in Kapitel 4.

In die Abb. 7.1(a) sind drei dynamisch reskalierte mittlere Geschwindigkeitsprofile bei $Pr = 7, 0.7, 0.1$ für $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass die drei dynamisch reskalierten Geschwindigkeitsprofile wiederum von der Prandtl-Blasius-Lösung abweichen. Mit zunehmender Prandtlzahl verbessert sich die Übereinstimmung der dynamischen Reskalierung der Geschwindigkeitsgrenzschicht mit der klassischen Prandtl-Blasius Theorie.

Die Abb. 7.1(b) zeigt die mittleren dynamischen reskalierten Temperaturprofile bei $Pr = 7, 0.7, 0.1$ für $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Auch hier ist mit zunehmender Prandtlzahl eine bessere Übereinstimmung

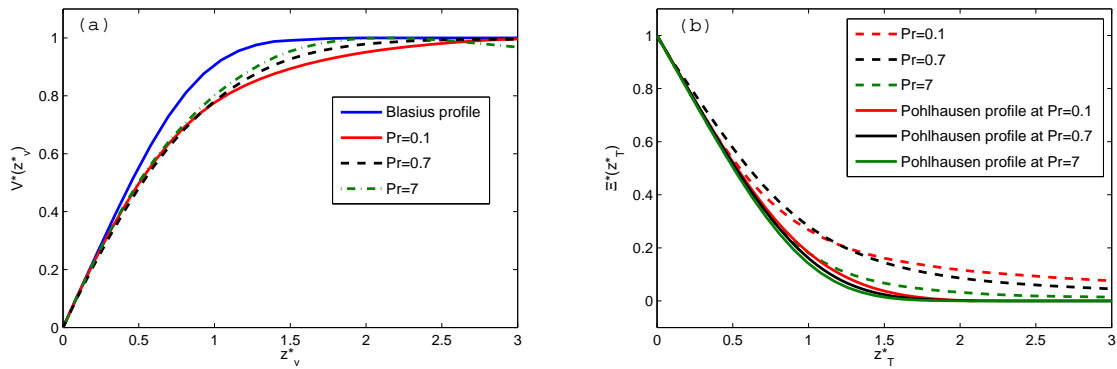


Abbildung 7.1: Dynamisches Reskalieren der mittleren Profile für unterschiedliche Prandtlzahlen. (a) Dynamisch reskalierte mittlere Geschwindigkeitsprofile für $Pr = 7, 0.7, 0.1$. Zum Vergleich ist das Blasius-Profil hinzugefügt. (b) Dynamisch reskalierte mittlere Temperaturprofile für $Pr = 7, 0.7, 0.1$. Dabei sind die Pohlhausen-Lösungen für unterschiedliche Prandtlzahlen eingetragen. Für beide Diagramme gilt $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$.

der dynamischen Reskalierung mit der klassischen Pohlhausen Theorie zu beobachten. Thermische Plumeablösungen scheinen die Hauptursache für diese Abweichungen zu sein.

Dies wird durch die bisherigen Studien von Puthenveetil et al. (2011), sowie die neuesten Experimente von Zhou und Xia (2010) bestätigt. Sie geben an, dass die Geschwindigkeitsgrenzschicht viel weniger gestört wird, wenn die Prandtlzahl erhöht wird. In diesem Fall wird die thermische Grenzschichtdicke viel kleiner als die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht. Plumes, die ablösen, haben einen viel engeren Stamm aufgrund der verringerten thermischen Diffusion. Daher sind die Profile näher an der Vorhersagen aus der laminaren Grenzschicht-Theorie, wenn die Prandtlzahl wächst.

7.2 Großskalige Zirkulation für verschiedene Pr

Die Abb. 7.2 zeigt erneut den momentanen Winkel ϕ_{LSC} und die Amplitude $(V_{LSC} - \langle V_{LSC} \rangle)/U_f$ der großskaliger Zirkulation für die obere Platte bei $Pr = 7, 0.7, 0.1$. Die zwei Graphiken links sind für $Pr = 7$. Die mittleren zwei Graphiken sind für $Pr = 0.7$. Die rechts zwei Graphiken sind für $Pr = 0.1$. Hier sind $\langle V_{LSC} \rangle / U_f = 0.1131, 0.1429, 0.2305$ für $Pr = 7, 0.7, 0.1$. Es ist ersichtlich, dass der Winkel der momentanen großskaligen Zirkulation wenig fluktuiert, wenn die Prandtlzahl wächst und die mittlere Amplitude der momentanen großskaligen Zirkulation mit abnehmender Prandtlzahl zunimmt. Durch die größeren Plumes kann im Fall der kleinen Prandtlzahl effektiver eine großskalige Strömung angetrieben werden. Das heißt die Strömungsturbulenz wird stärker angefach.

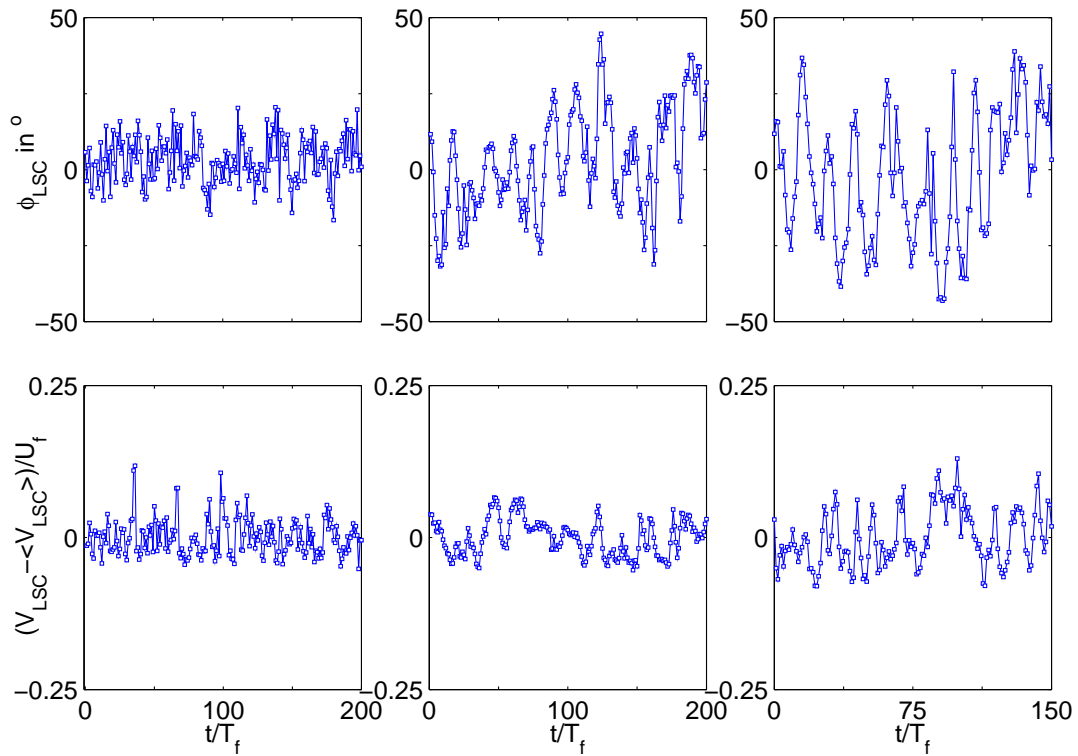


Abbildung 7.2: Richtung ϕ_{LSC} , Größe $(V_{LSC} - \langle V_{LSC} \rangle) / U_f$ der momentanen großskaligen Zirkulation bei $z_0 = H - \delta_T$ für die obere Platte bei unterschiedlichen Prandtlzahlen. Die linke Spalte stellt für $Pr = 7$, die mittlere Spalte für $Pr = 0.7$ und die rechte Spalte für $Pr = 0.1$ dar. Hier sind $\langle V_{LSC} \rangle / U_f = 0.1131, 0.1429, 0.2305$ für $Pr = 7, 0.7, 0.1$. Alle Daten sind bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ berechnet worden.

7.3 Grenzschichtdynamik in einem kleinen Beobachtungsfenster

Wie in Kapitel 5.2 konnten zwei charakteristische dynamische Sequenzen der Grenzschichtstrukturen für $Ra = 3 \times 10^9$, $Pr = 7$ und $\Gamma = 1$ beobachtet werden. Eine ist die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”), die andere ist die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”). Jede dieser beiden typischen Sequenzen umfasst erneut ungefähr eine Zeit von etwa $0.45T_f$. Man kann sie als die beiden wesentlichen Bausteine der Grenzschichtdynamik betrachten. Hier wurde ein Fenster in einer kleinen senkrechten Beobachtungsebene analysiert, die mit der momentanen großskaligen Zirkulation ausgerichtet ist. Dieses Beobachtungsfenster hat die Größe von Länge \times Höhe gleich $9.1\delta_T \times 9.1\delta_T$. Die dichte zeitliche Ausgabe der Daten umfasst $20 T_f$ mit einem Zeitintervall von $0.05T_f$.

Diese Analyse für $Pr = 7$ war gleich für $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ wie in Kapitel 5.2. Das qualitative Bild bleibt unverändert für die beiden Phasen Plumeablösungsphase und Relaminarisierungsphase. Die Plumeablösungsphase ist in der Abbildung 7.3 und die Relaminarisierungsphase in der Abbildung 7.5 dargestellt. Die Zeit in der ersten, zweiten und dritten Reihe ist entsprechend $0.05T_f$, $0.25T_f$ und $0.45T_f$. Die farbige Konturskala (hier nicht dargestellt) für die Temperatur in der ersten

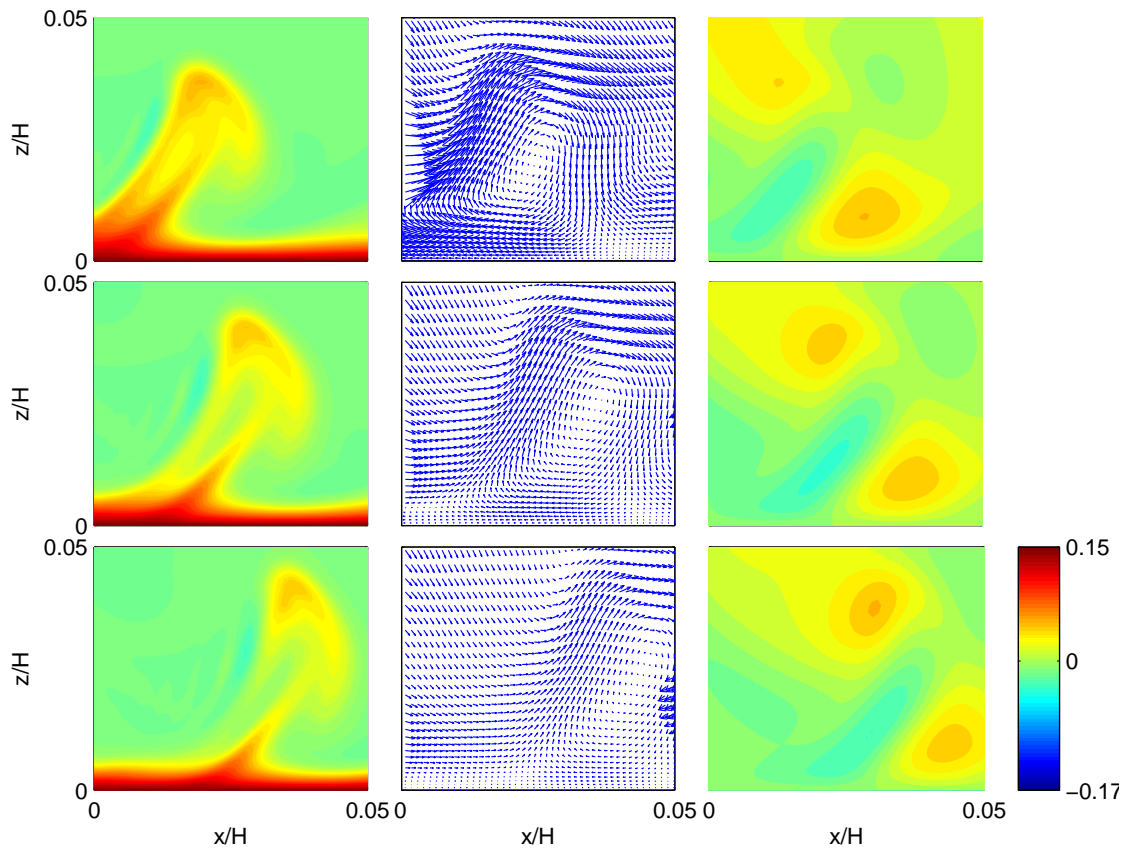


Abbildung 7.3: Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnitten Schnappschusses für die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”). Die erste Spalte zeigt die Konturen der Temperatur T , die zweite zeigt ein Vektor-Diagramm von (u_r, u_z) und die dritte zeigt Konturen von u_ϕ . Die erste Reihe zeigt die Daten aus dem ersten Schnappschuss, die zweite Reihe zeigt die Daten aus dem fünften Schnappschuss und die dritte Reihe zeigt die Daten aus dem neunten Schnappschuss. Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$, $Pr = 7$ und $\Gamma = 1$, wobei $\delta_T/H = 0.0055$.

Spalte entspricht einer äquidistanten Farbskala zwischen 0 (blau) und 1 (rot). Die skalare Größe für die azimuthale Geschwindigkeitskomponente in der dritten Spalte wird durch die Farbbalken in der rechten Spalte angezeigt. Blau steht für negative Werte und rot für positive Werte. Diese drei Zeitpunkte sind die Schnappschüsse 1, 5 und 9 aus einer Sequenz von neun äquidistanten Momentaufnahmen.

Wie in Kapitel 5.2 für $Pr = 0.7$ verursacht der Aufstieg der heißen Flüssigkeit eine starke Ausströmung nach oben auch für $Pr = 7$. Die Plumeablösung ist einer der dynamischen Prozesse, die die Schwankungen der Grenzschichtdicken verursachen. Im Vergleich zur Plumeablösungsphase sind die Schichten des Temperaturfeldes in die Relaminarisierungsphase nahezu ungestört. Die Amplitude der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente bleibt signifikant, wie in Abb. 7.4 zu sehen ist. Die Abbildung 7.4 stellt die entsprechenden Profile der mittleren radialen Geschwindigkeitskomponente u_r/u_f , der vertikalen Geschwindigkeitskomponente u_z/u_f , der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente u_ϕ/u_f und der Temperatur T für beide Phasen dar.

Im Vergleich zu den Abb. 5.2 und Abb. 5.4 für $Pr = 0.7$ in Kapitel 5.2 ist es deutlich zu erkennen,

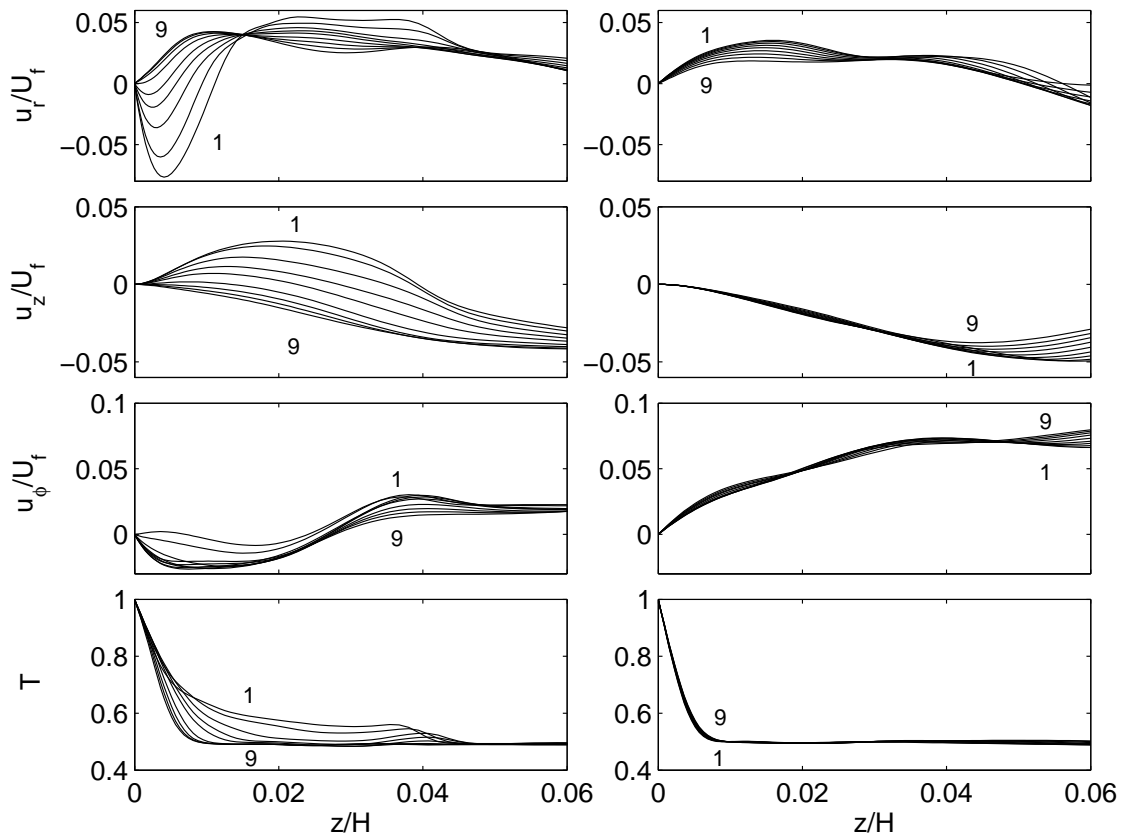


Abbildung 7.4: Sequenz von neun Profilen, die mit den Daten von Abb. 7.3 für die Plumeablösungsphase (linke Spalte) und mit den Daten von Abb. 7.5 für die Relaminarisierung (rechte Spalte). Sie werden durch eine Mittelung in radialer (oder x -) Richtung über das Fenster ermittelt. Von oben nach unten sind radiale Geschwindigkeitskomponente u_r/U_f , vertikale Geschwindigkeitskomponente u_z/U_f , azimuthale Geschwindigkeitskomponente u_ϕ/U_f und die Temperatur T dargestellt.

dass für $Pr = 7$ die Amplituden von (u_r, u_z) in beide Phasen viel kleiner als die für $Pr = 0.7$ sind. Die Geschwindigkeitskomponenten u_r/U_f , u_z/U_f und u_ϕ/U_f in Abb. 7.4 für $Pr = 7$ sind kleiner und weniger gestört als die in Abb. 5.3 für $Pr = 0.7$.

In beiden Prandtlzahlen zeigen die Profile der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente u_ϕ das folgende Verhalten in der Nähe der Wand. In der Plumeablösungsphase gibt es starke Ein- und Ausströmungen aus der bzw. in die Bulkregion. Aber das ist nicht der Fall in der Relaminarisierungsphase. Die Unterschiede zwischen der Temperatur für beide Phasen sind ausgeprägter.

7.4 Wirbelstruktur für verschiedene Pr

Wir wissen, dass turbulente Scherströmungen von kohärenten Strukturen in der Nähe der festen Wände dominiert werden. Um die Formation und evolutionäre Dynamik kohärenter Strukturen zu erkennen, um die Rolle der kohärenten Strukturen in turbulente Phänomene zu erforschen, wurde hier ein erster Schritt getan und die Wirbelstruktur in der Grenzschicht für verschiedene Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und

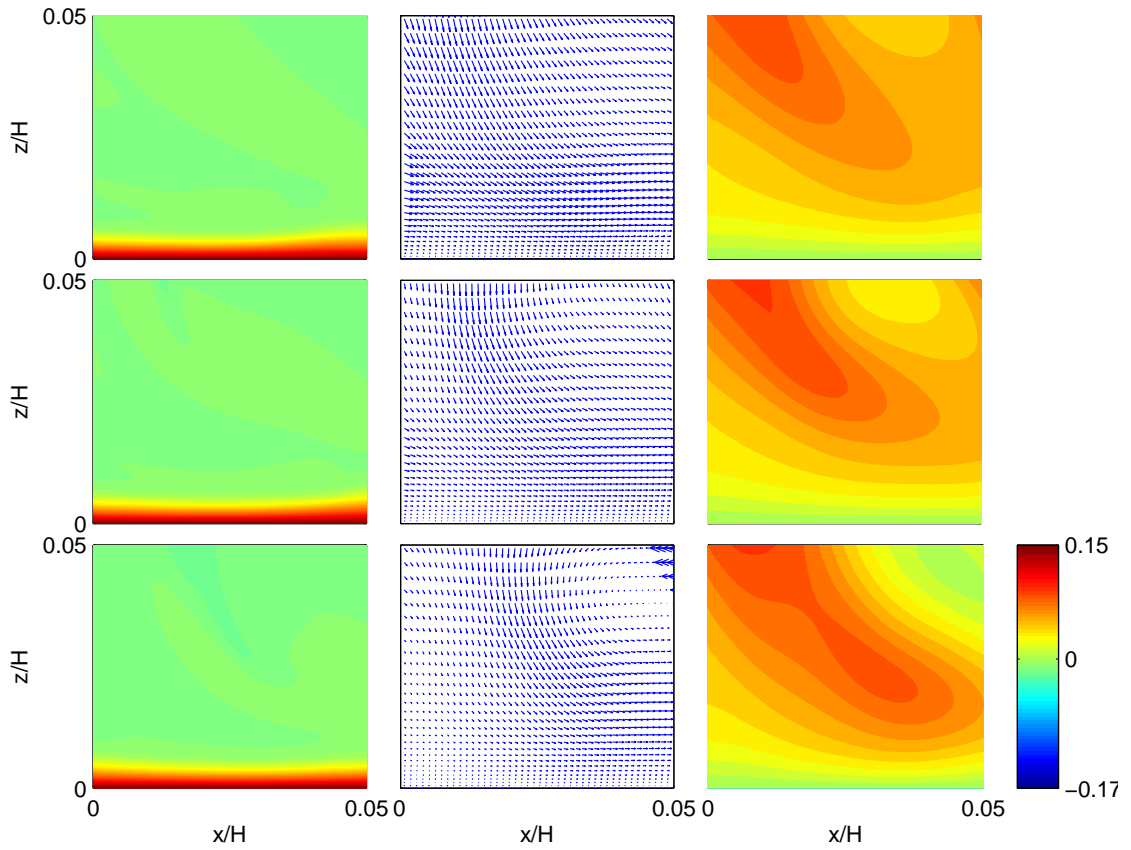


Abbildung 7.5: Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”). Die erste Spalte zeigt die Konturen der Temperatur T , die zweite zeigt ein Vektor-Diagramm von (u_r, u_z) und die dritte zeigt Konturen von u_ϕ . Die erste Reihe zeigt die Daten aus dem ersten Schnappschuss, die zweite Reihe zeigt die Daten aus dem fünften Schnappschuss und die dritte Reihe zeigt die Daten aus dem neunten Schnappschuss. Die Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$, $Pr = 7$ und $\Gamma = 1$, wobei $\delta_T/H = 0.0055$.

$\Gamma = 1$ verglichen. Dazu wurde das λ_2 -Kriterium benutzt. Jeong und Hussain (1995) haben aus den Navier-Stokes-Gleichungen die Beziehung

$$a_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,ij} + \nu u_{i,jkk} \quad (7.1)$$

abgeleitet bei der

$$p_{,ij} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_{i,jkk} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_k}. \quad (7.2)$$

Hierbei ist $a_{i,j}$ der Beschleunigungsgradient, $p_{,ij}$ die Hessesche Normalform des Drucks und u_i die Geschwindigkeitskomponenten. $p_{,ij}$ ist eine symmetrische Matrix. Der Beschleunigungsgradiententensor $a_{i,j}$ kann in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden:

$$a_{i,j} = \underbrace{\left[\frac{dS_{ij}}{dt} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} \right]}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\left[\frac{d\Omega_{ij}}{dt} + \Omega_{ik}S_{kj} + S_{ik}\Omega_{kj} \right]}_{\text{antisymmetrisch}} \quad (7.3)$$

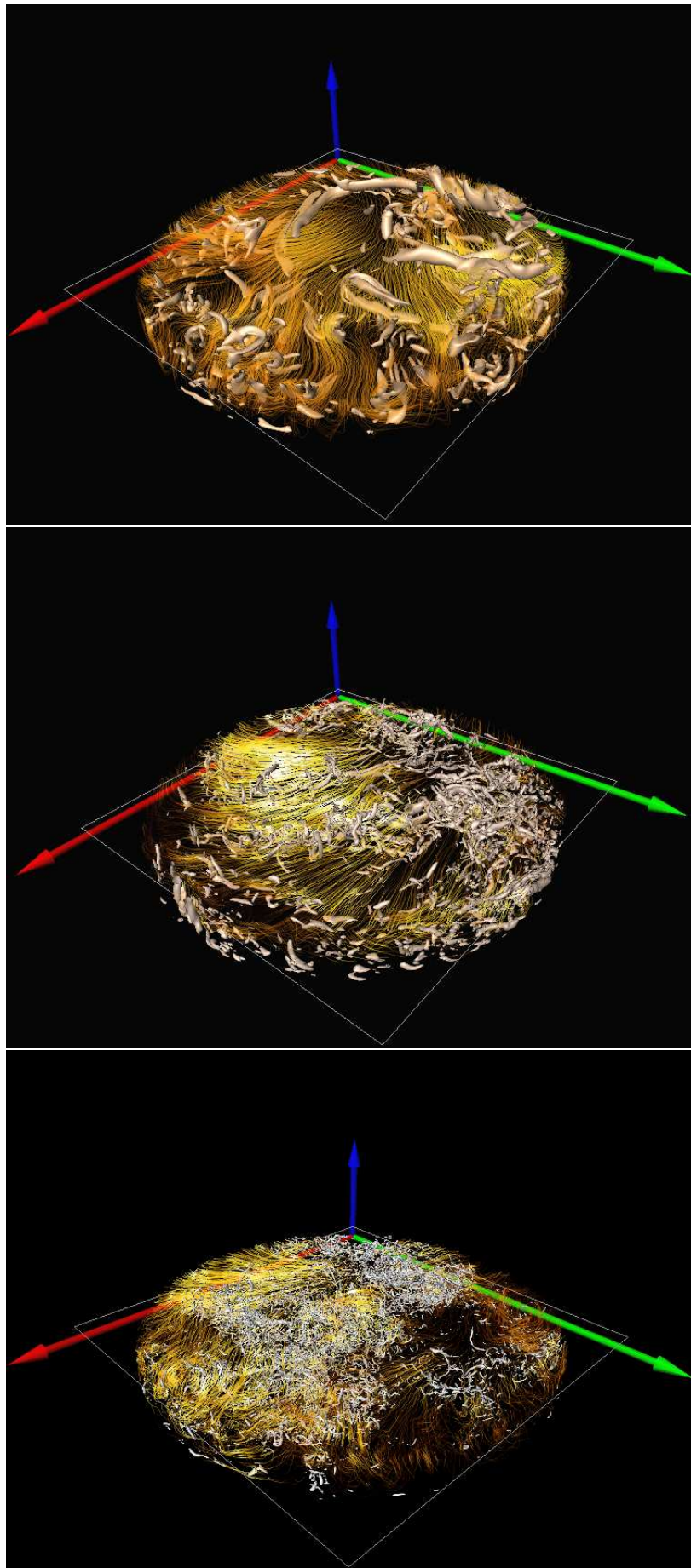


Abbildung 7.6: Schnappschuss mit dreidimensionalen Stromlinien und Wirbel in einer turbulenten Konvektionszelle für unterschiedliche Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Oben ist für $Pr = 7$. Die Mitte ist für $Pr = 0.7$. Unten ist für $Pr = 0.1$.

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (7.4)$$

wobei S und Ω der symmetrische und der antisymmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradiententensors sind. Sie werden als Scherratentensor und Wirbelsärkentensor bezeichnet.

Der antisymmetrische Anteil von $a_{i,j}$ ist die bekannte Wirbelstärketransportgleichung und soll nicht weiter berücksichtigt werden. Wird der symmetrische Anteil von $a_{i,j}$ in die Gleichungen (7.1) und (7.3) eingesetzt, ergibt sich für den Scherratentensor

$$\frac{dS_{ij}}{dt} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} = -\frac{1}{\rho}p_{,ij} + \nu S_{ij,kk} \quad (7.5)$$

mit

$$S_{ij,kk} = \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (7.6)$$

Dann erhält man

$$\frac{dS_{ij}}{dt} - \nu S_{ij,kk} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} = -\frac{1}{\rho}p_{,ij}. \quad (7.7)$$

In der Gleichung (7.7) stellt dS_{ij}/dt die instationären Scherspannungen und $\nu S_{ij,kk}$ die viskosen Effekte dar. Sie werden hier vernachlässigt. Daraus ergibt sich durch Vergleich mit der Gleichung (7.1)

$$\Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} = -\frac{1}{\rho}p_{,ij} \quad (7.8)$$

Nach Jeong und Hussain (1995) gibt es einen Wirbel, wenn die $(\Omega^2 + S^2)$ zwei negative Eigenwerte besitzt. Da $(\Omega^2 + S^2)$ symmetrisch ist, gibt es nur reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 . Mit $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ wird ein Wirbel identifiziert, wenn $\lambda_2 < 0$ ist. Deshalb ist λ_2 ein Indikator für Wirbel.

Die Abb. 7.6 zeigt die momentanen 3D Geschwindigkeitsfelder und Wirbelstruktur von der Bodenplatte bis zum $z/H = 0,1$ für $Pr = 7, 0.7, 0.1$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Es handelt sich um eine Draufsicht, also von oben nach unten. Bei diesen drei Prandtlzahlen ist eine mittlere Strömungsrichtung zu beobachten. Es ist ersichtlich, dass die Wirbel senkrecht zu den Stromlinien sind. Mit abnehmender Prandtlzahl werden die Wirbel kleiner. Diese erste kurze Analyse zeigt bereits, dass die Geschwindigkeitsgrenzschicht sich stark mit der Prandtlzahl ändert. Die Wirbel werden viel kohärenter, wenn die Prandtlzahl wächst. Das heißt, dieser Bereich erweist sich als der geeignete, wenn man die Dynamik der Strömungswirbel nahe der Wand verstehen möchte.

7.5 Temperaturfeld für verschiedene Pr

Wie ändert sich das Temperaturfeld für unterschiedliche Prandtlzahlen? Für die Beantwortung dieser Frage wurden zuerst die horizontalen Querschnitte des Temperaturfeldes vom momentanen Schnappschuss bei $z = \delta_T$ und bei $z = H/2$ für $Pr = 7, 0.7, 0.1$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ untersucht. Die

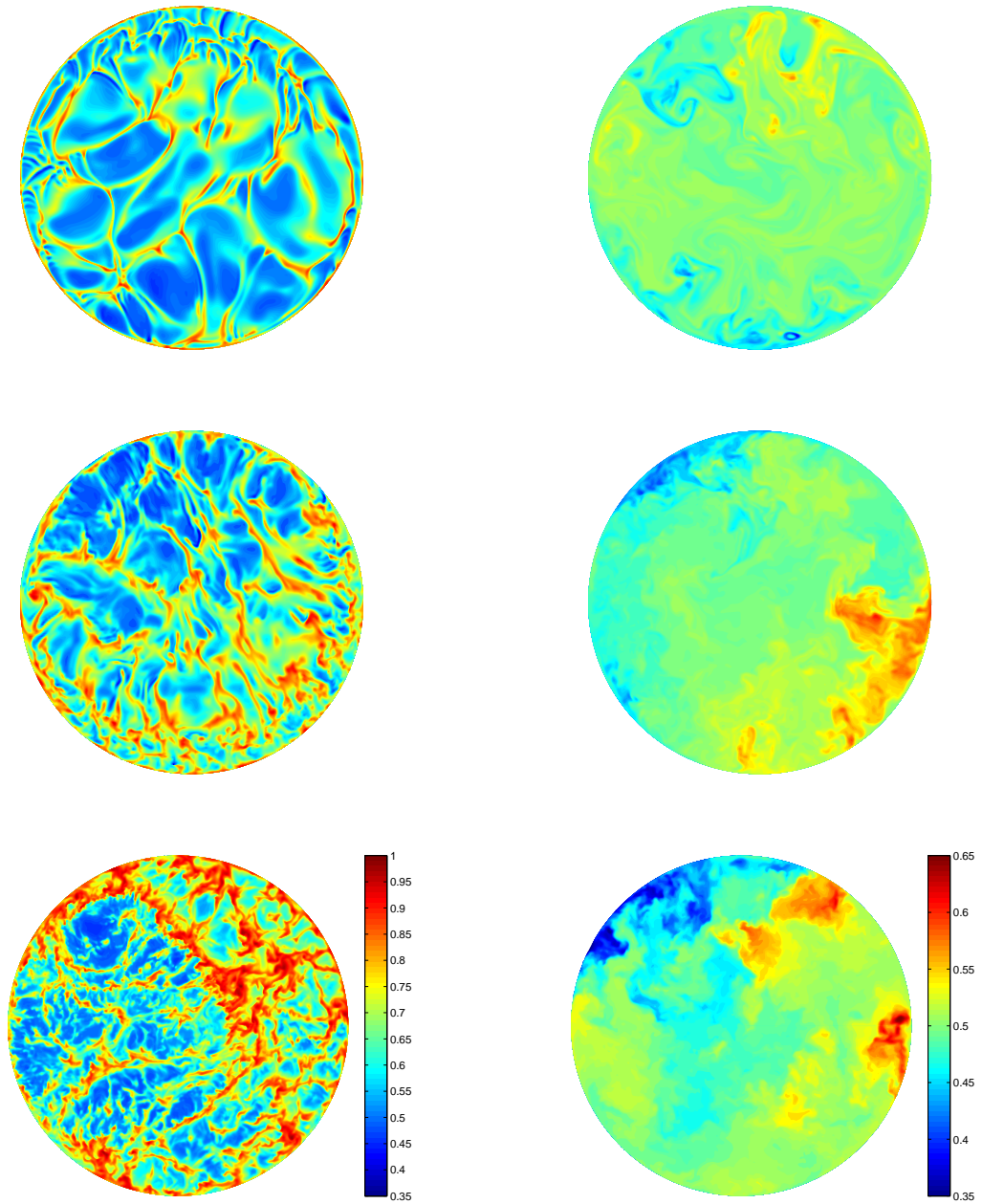


Abbildung 7.7: Horizontale Querschnitte des Temperaturfeldes vom momentanen Schnappschuss bei $z = \delta_T$ (links) und bei $z = H/2$ (rechts) für unterschiedliche Prandtlzahlen. Die erste Zeile stellt für $Pr = 7$, die zweite Zeile für $Pr = 0.7$ und die dritte Zeile für $Pr = 0.1$ dar. Alle Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$.

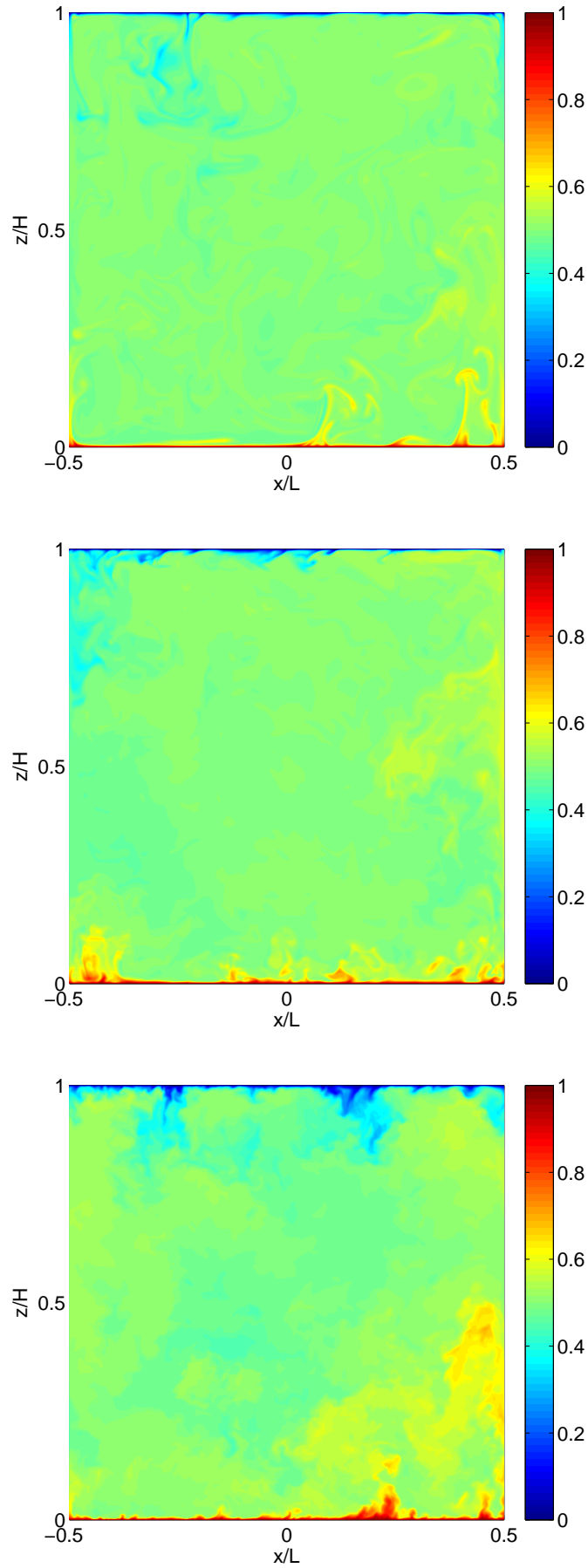


Abbildung 7.8: Vertikale Querschnitte des Temperaturfeldes vom momentanen Schnappschuss für unterschiedliche Prandtlzahlen. Das erste Diagramm stellt für $Pr = 7$, das zweite für $Pr = 0.7$ und das dritte für $Pr = 0.1$ dar. Alle Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$.

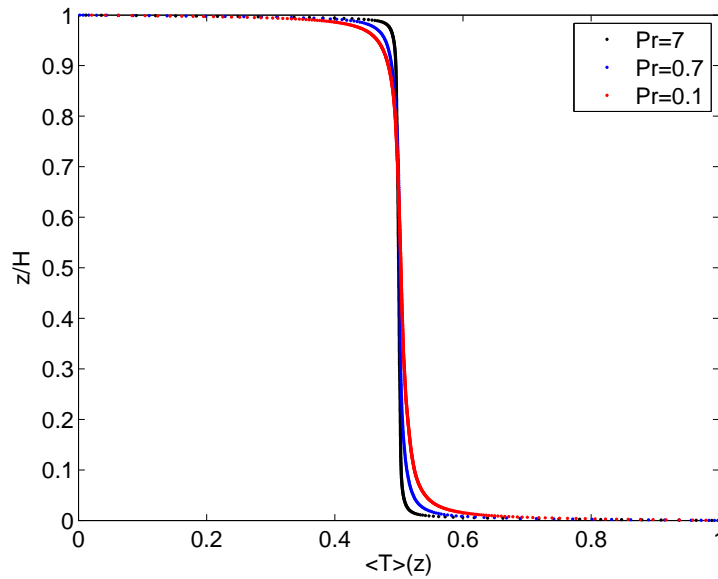


Abbildung 7.9: Mittlere Temperaturprofile für $Pr = 7, 0.7, 0.1$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$.

Abb. 7.7 stellt die Temperaturverteilung vom momentanen Schnappschuss als horizontalen Querschnitt in der thermischen Grenzschichtdicke und in der Mitte der Zelle dar. Die linke Spalte ist bei $z = \delta_T$ und rechte Spalte bei $z = H/2$. Die erste Zeile ist für $Pr = 7$, die zweite Zeile für $Pr = 0.7$ und die dritte Zeile für $Pr = 0.1$. Alle Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Es ist zu sehen, dass am Ende der thermischen Grenzschicht die Plumes wie Linien mit signifikanter Modulation der Dicke entlang ihrem Stamm aussehen. Bei $Pr = 0.7$ spielt die Diffusion immer noch eine wichtige Rolle in der Formation der Plumes. Dies führt auch zu einer begrenzten Anwendbarkeit von zweidimensionalen Plumemodellen, in denen räumliche Variationen in der dritten Richtung klein angenommen (wie Puthenveetil & Arakeri 2005) werden. Ähnliche Temperaturverläufe haben Zhou et al. (2007), Shishkina & Wagner (2008), Zhou & Xia (2010b) und Puthenveetil et al. (2011) gefunden, wobei Länge, Breite und Seitenverhältnis der Filamente in diesem Plumeskelett im Detail quantifiziert wurden. In der Abb. 7.7 ist auch zu erkennen, dass sich mit abnehmender Prandtlzahl mehr Plumes von der Grenzschicht ablösen. Die Strukturen erscheinen viel weniger linienförmig. In der Mittelebene sind die Unterschiede in der Struktur des Temperaturfeldes geringer.

Dann wurden vertikale Querschnitte des Temperaturfeldes in der Mitte der Konvektionszelle vom momentanen Schnappschuss für unterschiedliche Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ untersucht. Die Abb. 7.8 zeigt die Temperaturverteilung vom momentanen Schnappschuss, welche durch vertikale Querschnitte von der Mitte der Zelle dargestellt ist. Das erste Diagramm ist für $Pr = 7$. Hier ist deutlich zu erkennen, dass sich warme Plumes von unten ablösen und nach oben steigen, während kalte

Plumes von oben nach unten sinken. Das zweite Diagramm ist für $Pr = 0.7$. Das dritte Diagramm ist für $Pr = 0.1$. Es lässt sich beobachten, dass mit abnehmender Prandtlzahl sich mehr warme Plumes von unten ablösen und nach oben steigen, während mehr kalte Plumes von oben nach unten sinken. Durch die erhöhte Diffusivität des Temperaturfeldes sind die Plumes größer. Sie reichen weiter in das Volumen.

Danach wurde die thermische Grenzschichtdicke für unterschiedliche Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ analysiert. In die Abb. 7.9 wurden die mittlere Temperaturprofile für $Pr = 7, 0.7, 0.1$ dargestellt. Die schwarze Linie ist für $Pr = 7$. Die blaue Linie ist für $Pr = 0.7$. Die rote Linie ist für $Pr = 0.1$. Hier ist wie erwartet ersichtlich, dass mit abnehmender Prandtlzahl die thermische Grenzschichtdicke zunimmt.

In der Tabelle 7.1 werden thermische Grenzschichtdicken für verschiedene Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$, sowie die dazugehörigen Nusseltzahlen aufgelistet.

Ra	Pr	δ_T/H	$Nu \pm \sigma$
3×10^9	7	0.0055	90.77 ± 0.45
3×10^9	0.7	0.0057	90.32 ± 0.63
3×10^9	0.1	0.0070	71.39 ± 0.28

Tabelle 7.1: Thermische Grenzschichtdicken für verschiedene Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Die Nusseltzahl Nu für verschiedene Prandtlzahlen ist ebenso eingetragen.

7.6 Lokale großskalige Zirkulation für verschiedene Pr

Die Frage, die wir am Ende des Kapitels beantworten möchten, ist wie kohärent ist die großskalige Zirkulation und wie ändert sich diese Kohärenz wenn Pr größer wird. Um die großskalige Zirkulation genau, d.h. lokalisiert, zu untersuchen, wurde hier der horizontale Querschnitt in der thermischen Grenzschichtdicke in 36 kleine Teile gleichmäßig verteilt. In Abb. 7.10 ist es zu sehen, dass es bei $r \leq \frac{1}{3}R$ 4 Teile gibt, bei $\frac{1}{3}R < r < \frac{2}{3}R$ 12 Teile bzw. bei $\frac{2}{3}R \leq r \leq R$ 20 Teile. Dabei ist R der Radius der Konvektionszelle. Für jedes Teilgebiet wurde der momentane Winkel ϕ_{LSC}^i und die momentane Amplitude V_{LSC}^i der großskaligen Zirkulation (LSC) wie bei Shi, Emran & Schumacher (2012) berechnet. Die dichte zeitliche Ausgabe der Daten umfasst $10T_f$ mit einem Zeitintervall von $0.05T_f$.

In die Abb. 7.11 (a) sind die lokalen Winkel ϕ_{LSC}^i der momentanen großskaligen Zirkulation für diese einzelnen 36 kleine Teilgebiete für $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ in die blaugrünen Linien dargestellt. Die schwarze Linie ist der globale Winkel ϕ_{LSC} der momentanen großskaligen Zirkulation

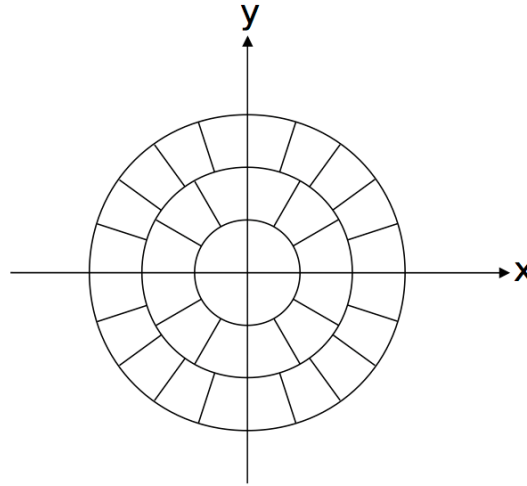


Abbildung 7.10: Gleichmäßige Verteilung des horizontalen Querschnittes bei $z = \delta_T$ in 36 kleine Teilgebiete.

über einen kreisförmigen Querschnitt mit $r \leq 0.88R$ bei $z = \delta_T$. ϕ_{LSC} ist in Kapitel 4.4 und 7.2 analysiert.

In die Abb. 7.11 (b) zeigen die blaugrünen Linien die lokalen Amplituden V_{LSC}^i der momentanen großskaligen Zirkulation für diese einzelnen 36 kleine Teilgebiete für $Pr = 0.7$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Die schwarze Linie ist die globale Amplitude V_{LSC} der momentanen großskaligen Zirkulation über einen kreisförmigen Querschnitt mit $r \leq 0.88R$ bei $z = \delta_T$ (siehe Kapitel 4.4 und 7.2).

Es ist deutlich erkennbar, dass die lokalen Winkel ϕ_{LSC}^i und die lokalen Amplitude V_{LSC}^i der momentanen großskaligen Zirkulation stark fluktuieren und sie für jeden Augenblick unterschiedlich zu den globalen Winkel ϕ_{LSC} und den globalen Amplituden V_{LSC} sind.

Die Abb. 7.11 (c) und (d) stellen die momentanen Winkel ϕ_{LSC}^i und die Amplituden V_{LSC}^i der großskaligen Zirkulation für $Pr = 7$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$ dar. Die schwarze Linie in Abb. 7.11 (c) ist der globale Winkel ϕ_{LSC} und die schwarze Linie in Abb. 7.11 (d) die globale Amplitude V_{LSC} der momentanen großskaligen Zirkulation über einen kreisförmigen Querschnitt mit $r \leq 0.88R$ bei $z = \delta_T$. Es ist ersichtlich, dass mit zunehmender Prandtlzahl die lokalen Amplitude V_{LSC}^i der momentanen großskaligen Zirkulation stärkere Fluktuationen aufzeigen.

Wie sehen, dass für beide Prandtlzahlen starke lokale Variationen der großskaligen Zirkulation beobachtbar sind. Es ist zu erwarten, dass diese Variationen mit wachsender Rayleighzahl zunehmen, d.h. dass die großskalige Zirkulation immer weniger kohärent wird und letztendlich zusammenbricht.

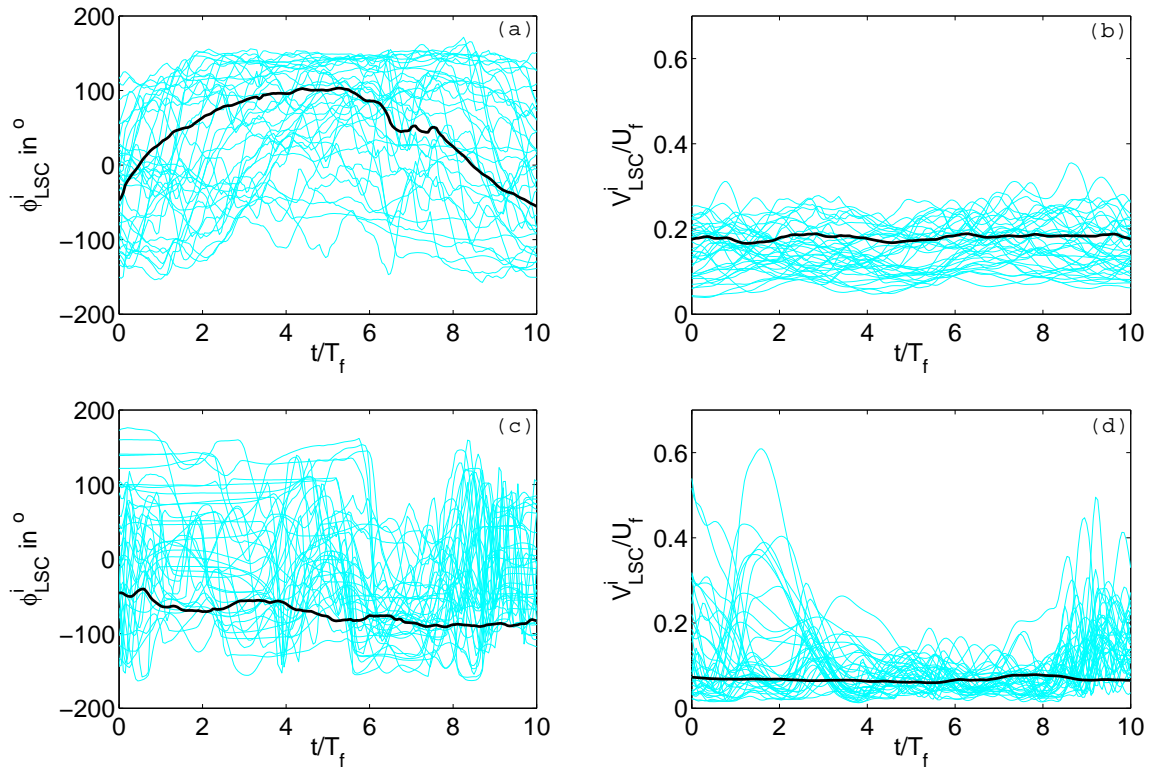


Abbildung 7.11: Richtung ϕ_{LSC}^i , Größe V_{LSC}^i der momentanen großskaligen Zirkulation bei $z = \delta_T$ in 36 kleine Teilgebiete. (a) und (b) sind für $Pr = 0.7$. (c) und (d) sind für $Pr = 7$. Die schwarze Linie in (a) und (c) ist die globale Winkel ϕ_{LSC} der momentanen großskaligen Zirkulation. Die schwarze Linie in (b) und (d) ist die globale Amplituden V_{LSC} der momentanen großskaligen Zirkulation. Alle Daten sind für $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$.

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Grenzschichtdynamik dreidimensionaler turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in einer zylindrischen Zelle mit dem Seitenverhältnis eins für Rayleighzahlen größer 10^9 untersucht. Der überwiegende Teil der Untersuchungen konzentrierte sich auf Konvektion in Luft mit $Pr = 0.7$. Die Daten der direkten numerischen Simulationen liefern den Zugang zu der vollen räumlichen und zeitlichen Information inner- und außerhalb der thermischen Grenzschicht bzw. der Geschwindigkeitsgrenzschicht.

Die großskalige Zirkulation, “large-scale circulation” (LSC), in der Zelle variiert in ihrer Richtung und Amplitude. Sie wirkt als ein zeitabhängiger Antrieb der Grenzschichtdynamik. Die schwankende großskalige Zirkulation steht im Einklang mit einer stark schwankenden thermischen Grenzschichtdicke bzw. Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke, die sich von Momentaufnahmen ableiten lassen, wie von Zhou & Xia (2010) vorgeschlagen. Wenn diese Schwankungen in ein dynamisches Reskalieren eingebaut werden, verbessert sich die Anpassung der mittleren Profile an die klassische Prandtl-Blasius-Pohlhausen Theorie. Aber bei der hier verwendeten zylindrischen Zelle bleiben die Abweichungen von den klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen Profilen bestehen, insbesondere für die Temperaturprofile. Die Profile passen auch nicht zu dem anderen Grenzfall der Grenzschichtdynamik, der natürlichen Konvektion.

Mit den vorliegenden DNS-Daten sollte die Verbindung von dynamischem Verhalten in der Grenzschicht und beobachteten Statistiken hergestellt werden. Die Analyse ergab, dass die Grenzschichten in allen Phasen eine dreidimensionale Dynamik beinhalten. Diese Schlussfolgerung ergibt sich aus Untersuchungen der großskaligen Zirkulation und lokaler dynamischer Sequenzen. Eine signifikante Strömung senkrecht zu einer zweidimensionalen Analyseebene ist so z. B. während der Plumeablösung vorhanden und wird auch in der Relaminarisierungsphase beobachtet. Die linienartigen Plumes bilden ein komplexes Skelett. Es konnte gezeigt werden, dass sie nicht parallel ausgerichtet sind. Ihre Ablösung geht einher mit einer signifikanten Variation der Grenzschichtdicken und einer Querströmung (azimutale Geschwindigkeit) mit einer signifikanten Amplitude.

Alle diese Beobachtungsergebnisse widersprechen den Annahmen, die bei der Herleitung der Ähnlichkeits-

lösungen in den klassischen Grenzschichttheorien gemacht werden. Die Analyse einer punktwisen Messreihe sowie in einem Beobachtungsfenster unterstützen unsere Ergebnisse. Dies begrenzt auch die Anwendbarkeit der zweidimensionalen Plumenmodelle und erklärt aus unserer Sicht die Abweichungen von beiden, dem klassische Prandtl-Blasius-Pohlhausen Fall und dem Fall der natürlichen Konvektion. Es wurden auch die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in der Nähe der horizontalen Platten für turbulente Rayleigh-Bénard Konvektion in Luft mit $Ra = 3 \times 10^9$ und 3×10^{10} und $\Gamma = 1$ direkt mit den Daten aus Experimenten am Ilmenauer Fass von Li et al. (2012) verglichen.

Die DNS-Daten der Geschwindigkeit passen sehr gut zu den Messungen vom Ilmenauer Fass, während sich die Daten der Temperatur geringfügig voneinander unterscheiden. Die mittleren horizontalen Geschwindigkeiten und die mittlere vertikale Geschwindigkeit zwischen Simulation und Experiment sind in ausgezeichneter Übereinstimmung. Doch in beiden Fällen weichen sie wie bereits erwähnt von der Prandtl-Blasius-Lösung einer laminaren nicht-isothermen Scherschicht ab. Im inneren Bereich der Konvektionszelle sind die Mittelwerte der vertikalen Geschwindigkeit Null über einen großen Bereich mit genügend Wandabstand. Aber diese Geschwindigkeitskomponente schwankt stark. Außerhalb des Zentrums, insbesondere in den Bereichen, in denen die Plumes an die horizontale Platten stoßen oder sie verlassen, wurde eine mittlere vertikale Geschwindigkeit ungleich Null festgestellt.

Die numerischen mittleren Temperaturprofile unterscheiden sich leicht von den gemessenen Ergebnissen am Ilmenauer Fass. Insbesondere sind die gemessenen Temperaturgradienten an der Wand deutlich höher als die der DNS Daten. Die beiden gemessenen Profile zeigen keinen klaren linearen Trend wie in für die DNS Daten. Leider konnten wir keine Erklärung für diese Abweichungen finden.

In dieser Arbeit wurden des weiteren die Grenzschichten für drei unterschiedliche Prandtlzahlen analysiert, und zwar $Pr = 7, 0.7, 0.1$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$. Wenn die Prandtlzahl steigt, wird die Geschwindigkeitsgrenzschicht viel weniger gestört. Gleichzeitig wird die thermische Grenzschichtdicke viel kleiner als die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht. Mit abnehmender Prandtlzahl wird die thermische Grenzschichtdicke dicker. Der Winkel der momentanen großskaligen Zirkulation hat weniger Fluktuation für die größere Prandtlzahl. Mit abnehmender Prandtlzahl nimmt die mittlere Amplitude der momentanen großskaligen Zirkulation zu. Mit zunehmender Prandtlzahl verbessert das dynamische Reskalieren der Grenzschicht die Übereinstimmung mit der klassischen Prandtl-Blasius-Pohlhausen-Lösungen. Die untersuchte Prandtlzahlabhängigkeit unterstreicht somit erneut, dass die thermische Plumeablösung die Hauptursache für die Abweichungen zur klassischen Grenzschichttheorie ist.

8.2 Ausblick

Für die weitere Untersuchung zur Struktur der Grenzschichten des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes in turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion wäre es interessant, wie die Dynamik in der Grenzschicht fluktuiert wenn die Rayleighzahl zu Werten von 10^{12} zu 10^{13} wächst. Das ist ein Punkt für zukünftige Untersuchungen. Ein solch zunehmend intermittentes Verhalten wäre typisch für eine Transitionsgrenzschicht, die letztlich vom laminaren zum vollständig turbulenten Zustand übergeht. Diese Interpretation würde auch im Einklang mit den DNS-Ergebnisse von den derzeit höchsten erreichbaren Rayleighzahlen von Stevens et al. (2012) stehen. Sie fanden heraus, dass die Vereinbarung einer dynamisch reskalierten thermischen Grenzschicht mit der Pohlhausen-Lösung schlechter wird, für wachsende Ra .

Zukünftige Arbeiten sollte das Seitenverhältnis der zylindrischen Konvektionszelle variiert werden. Der globale Wärmetransport sollte bei fester Rayleighzahl als Funktion vom Seitenverhältnis untersucht werden. Dann kann man beweisen, in wie weit lässt sich das globale Transportgesetz mit seiner systematischen Γ -Abhängigkeit zu größeren Ra und Γ fortsetzen. Die Abhängigkeit der globalen Wärmetransporteigenschaften der turbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion von der Rayleighzahl und des Seitenverhältnisses sollte in DNS weiter untersucht werden. Die Geometrieabhängigkeit vom globalen Wärmetransportgesetz $Nu = f(Ra, \Gamma)$ sollte mit der vom Impulstransportgesetz aus Taylor-Couette Strömungen und Rohrströmungen verglichen werden.

Ein weiterer Aspekt ist die detaillierte Analyse der Geschwindigkeitsstrukturen, die wir hier mit der λ_2 -Analyse bereits begonnen. Ihre Untersuchung ist wichtig für das bessere Verständnis des Impulstransports.

Literaturverzeichnis

- AHLERS, G., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2009 Heat transfer & large-scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 503-537.
- AHLERS, G., BODENSCHATZ, E., FUNFSCHILLING, D. & HOGG, J. 2009a Turbulent Rayleigh-Bénard convection for a Prandtl number of 0.67. *Rev. Mod. Phys.* **641**, 157-167 .
- AHLERS, G., BODENSCHATZ, E., FUNFSCHILLING, D., GROSSMANN, S., HE, X., LOHSE, D., STEVENS, R.J.A.M. & VERZICCO, R. 2012 Logarithmic temperature profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 114501.
- BAILON-CUBA, J., EMRAN, M. S. & SCHUMACHER, J. 2010 Aspect ratio dependence of heat transfer and large-scale flow in turbulent convection. *J. Fluid Mech.* **655**, 152-173 .
- BAILON-CUBA, J. & SCHUMACHER, J. 2011 Low-dimensional model of turbulent Rayleigh-Bénard convection in a Cartesian cell with square domain. *Phys. Fluids* **23**, 077101 (16 pages).
- BÉNARD, H. 1900 Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, Revue genral des sciences pures et appliquees. *Revue genral des sciences pures et appliquees* **11**, 1261-1271 and 1309-1328.
- BELMONTE, A., TILGNER, A. & LIBCHABER, A. 1994 Temperature and velocity boundary layer in turbulent convection. *Phys. Rev. E* **50**, 269-279.
- BLASIUS, H. 1908 Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. Physik **56**, 1-37.
- BOUSSINESQ, J. V. 1903 Théorie analytique de la chaleur: Volume 2. *Gauthier-Villars*, Paris.
- BROWN, E., NIKOLAENKO, A. & AHLERS, G. 2005 Reorientation of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 084503 (4 pages).
- BROWN, E. & AHLERS, G. 2009 The origin of oscillations of the large-scale circulation of turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **638**, 383-400.
- CHILLÀ, F. & SCHUMACHER, J. 2012 New perspectives in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Eur. J. Phys. E* **35**, 58.

- DU PUIITS, R., RESAGK, C. & TRESS, A. 2007 Mean velocity profile in confined turbulent convection. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 234504 (4 pages).
- DU PUIITS, R., RESAGK, C. & TRESS, A. 2007a Breakdown of wind in turbulent thermal convection. *Phys. Rev. E* **75**, 016302 (4 pages).
- DU PUIITS, R., RESAGK, C., TILGNER, A., BUSSE, F. H. & TRESS, A. 2007b Structure of thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **572**, 231-254.
- DU PUIITS, R., RESAGK, C. & TRESS, A. 2009 Structure of viscous boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **80**, 016302 036318.
- DU PUIITS, R., RESAGK, C. & TRESS, A. 2010 Measurements of the instantaneous local heat flux in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *New J. Phys.* **12**, 075023 (13 pages)
- DU PUIITS, R., RESAGK, C. & TRESS, A. 2013 Thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection at aspect ratios between 1 and 9. *New J. Phys.* **15**, 013040.
- EMRAN, M. S. & SCHUMACHER, J. 2008 Fine-scale statistics of temperature and its derivatives in convective turbulence. *J. Fluid Mech.* **611**, 13-34.
- EMRAN, M. S. 2009 Fine-scale statistics in Rayleigh-Bénard convection. PhD Thesis, Technische Universität Ilmenau.
- EMRAN, M. S. & SCHUMACHER, J. 2010 Lagrangian tracer dynamics in a closed cylindrical turbulent convection cell. *Phys. Rev. E* **82**, 016303 (9 pages).
- FUJI, T. 1963 Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line source and a point heat source. *Intl. J. Heat Mass Transfer* **6**, 597-606.
- FUNFSCHILLING, D. & AHLERS, G. 2004 Plume motion and large-scale circulation in a cylindrical Rayleigh-Bénard cell. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 194502 (4 pages).
- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2000 Scaling in thermal convection: a unifying theory. *J. Fluid Mech.* **407**, 27-56.
- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2002 Prandtl and Rayleigh number dependence of the Reynolds number in turbulent thermal convection. *Phys. Rev. E* **66**, 016305.
- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2004 Fluctuations in turbulent Rayleigh-Bénard convection: The role of plumes. *J. Phys. Fluids* **16**, 4462-4472.

- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2011 Multiple scaling in the ultimate regime of thermal convection. *Phys. Fluids* **23**, 045108.
- GRÖTZBACH, G. 1983 Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh Bénard convection. *J. Comput. Phys.* **49**, 241-269.
- HE, X.-Z., FUNFSCHILLING, D., NOBACH, H., BODENSCHATZ, E. & AHLERS, G. 2012 Transition to the Ultimate State of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection. *Phys. Rev. E* **108**, 024502.
- HIEBER, C. A. 1973 Mixed convection above a heated horizontal surface. *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 769-785.
- JEONG, J. & HUSSAIN, F. 1995 On the Identification of a Vortex. *J. Fluid Mech.* **285**, 69-94.
- KIM, J. & MOIN, P. 1985 Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **59**, 308-323.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1987 *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, New York.
- LI, L., SHI, N., DU PUIS, R., RESAGK, C., SCHUMACHER, J. & TRESS, A. 2012 Boundary layer analysis in turbulent Rayleigh-Bénard convection in air: Experiment versus simulation. *Phys. Rev. E* **86**, 026315.
- LI, L. 2013 Experimental investigation of the velocity and temperature fields near the walls in turbulent Rayleigh-Bénard convection. PhD Thesis, Technische Universität Ilmenau.
- LUI, S. L. & XIA, K. Q. 1998 Spatial structure of the thermal boundary layer in turbulent convection. *Phys. Rev. E* **57**, 5494.
- POHLHAUSEN, E. 1921 Der Wärmetausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 115-121.
- POPE, S. B. 2000 *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- PRANDTL, L. 1905 Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proceedings of the III. International Mathematicians Congress, Heidelberg, 1904. B. G. Teubner, Leipzig, 1905, 484-491.
- PRESTON, J. H. 1958 The minimum Reynolds number for a turbulent boundary layer and the selection of a transition device. *J. Fluid Mech.* **3**, 373-384.
- PUTHENVEETIL, B. A. & ARAKERI, J. H. 2005 Plume structure in high-Rayleigh-number convection. *J. Fluid Mech.* **542**, 217-249.

- PUTHENVEETIL, B. A., GUNASEGARANE, G. S., AGRAWAL, Y. K., SCHMELING, D., BOSBACH, J. & ARAKERI, J. H. 2011 Length of near-wall plumes in turbulent convection. *J. Fluid Mech.* **685**, 335-364.
- Rayleigh, L. 1916 On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Philos. Mag.* **32**, 529.
- RESAGK, C., DU PUIITS, R., THESS, A., DOLZHANSKY, F.V., GROSSMANN, S., ARAUJO, F.F. & LOHSE, D. 2006 Oscillations of the large scale wind in turbulent thermal convection. *Phys. Fluids* **18**, 095105.
- ROTEM, Z. & CLAASSEN, L. 1969 Natural convection above unconfined horizontal surfaces. *J. Fluid Mech.* **39**, 173-192.
- SCHEEL, J. D., KIM, E. & WHITE, K. R. 2012 Thermal and viscous boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **711**, 281-305.
- SCHLICHTING, H. 1957 *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin.
- SCHUMACHER, J. 2009 Lagrangian studies in convective turbulence. *Phys. Rev. E* **79**, 056301.
- SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2008 Analysis of sheet-like thermal plumes in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **599**, 383-404.
- SHISHKINA, O., STEVENS, R. A. J. M., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2010 Boundary layer structure in turbulent thermal convection and its consequences for the required numerical resolution. *New J. Phys.* **12**, 075022 (17 pages).
- SHI, N., EMRAN, M. S. & SCHUMACHER, J. 2012 Boundary layer structure in turbulent Rayleigh-Bénard convection *J. Fluid Mech.* **706**, 5.
- SHRAIMAN, B. I. & SIGGIA, E. D. 1990 Heat Transport in High Rayleigh Number Convection. *Phys. Rev. A* **42**, 3650.
- SIGGIA, E. D. 1994 High Rayleigh number convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 137-168.
- SPARROW, E. M. & MINKOWYCZ, W. J. 1962 Buoyancy effects on horizontal boundary-layer flow and heat transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 503-511.
- STEVENS, R. J. A. M., LOHSE, D. & VERZICCO, R. 2011 Prandtl and Rayleigh number dependence of heat transport in high Rayleigh number thermal convection. *J. Fluid Mech.* **688**, 31-43.

- STEVENS, R. J. A. M., ZHOU, Q., GROSSMANN, S., VERZICCO, R., XIA, K.-Q. & LOHSE, D. 2012 Thermal boundary layer profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection in a cylindrical sample. *Phys. Rev. E* **85**, 027301 (5 pages).
- STEWARTSON, K. 1958 On the free convection from a horizontal plate. *Z. A. M. P.* **9**, 276-292.
- SUN, C., CHEUNG, Y.-H. & XIA, K.-Q. 2008 Experimental studies of the viscous boundary layer properties in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **605**, 79-113.
- THEERTHAN, S. A. & ARAKERI, J. H. 1998 A model for near wall dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **373**, 221-254.
- TILGNER, A., BELMONTE, A. & LIBCHABER, A. 1993 Temperature and velocity profiles in turbulent convection in water. *Phys. Rev. E* **47**, R2253.
- VAN REEUWIJK, M., JONKER, H. J. J. & HANJALIĆ, K. 2008 Wind and boundary layers in Rayleigh-Bénard convection. I. Analysis and modeling. *Phys. Rev. E* **77**, 036311 (15 pages).
- VAN REEUWIJK, M., JONKER, H. J. J. & HANJALIĆ, K. 2008a Wind and boundary layers in Rayleigh-Bénard convection. II. Boundary layer character and scaling. *Phys. Rev. E* **77**, 036312 (10 pages).
- VERZICCO, R. & SREENIVASAN, K. R. 2008 A comparison of turbulent thermal convection between conditions of constant temperature and constant heat flux. *J. Fluid Mech.* **595**, 203-219.
- VERZICCO, R. & CAMUSSI, R. 2003 Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech.* **477**, 19-49.
- VERZICCO, R. & CAMUSSI, R. 1999 Prandtl number effects in convective turbulence. *J. Fluid Mech.* **383**, 55-73.
- VERZICCO, R. & ORLANDI, P. 1996 A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *J. Comp. Phys.* **123**, 402-414.
- WAGNER, S., SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2012 Boundary layers and wind in cylindrical Rayleigh-Bénard cells. *J. Fluid Mech.* **697**, 336-366.
- XI, H.-D. & XIA, K.-Q. 2008 Azimuthal motion, reorientation, cessation, and reversal of the large-scale circulation in turbulent thermal convection: A comparative study in aspect ratio one and one-half geometries. *Phys. Rev. E* **78**, 036326 (11 pages).

- XI, H.-D. & XIA, K.-Q. 2008a Flow mode transitions in turbulent thermal convection. *Phys. Fluids* **20**, 055104 (15 pages).
- XIN, Y. B., XIA, K.-Q. & TONG, P. 1996 Measured velocity boundary layers in turbulent convection. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1266.
- ZHOU, Q., SUN, C. & XIA, K.-Q. 2007 Morphological evolution of thermal plumes in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 074501 (4 pages).
- ZHOU, Q. & XIA, K.-Q. 2010 Measured instantaneous viscous boundary layer in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 104301 (4 pages).
- ZHOU, Q., STEVENS, R. J. A. M., SUGIYAMA, K., GROSSMANN, S., LOHSE, D. & XIA, K.-Q. 2010a Prandtl-Blasius temperature and velocity boundary-layer profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **664**, 297-312.
- ZHOU, Q. & XIA, K.-Q. 2010b Physical and geometrical properties of thermal plumes in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *New J. Phys.* **12**, 075006 (22 pages).
- ZHOU, Q., SUGIYAMA, K., STEVENS, R. J. A. M., GROSSMANN, S., LOHSE, D. & XIA, K.-Q. 2011 Horizontal structures of velocity and temperature boundary layers in two-dimensional numerical turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Fluids* **23**, 125104.

Symbolverzeichnis

H	Höhe der Konvektionszelle
Gr	Grashofzahl
L	Länge der Konvektionszelle
N_{BL}	Anzahl der Gitterebenen in der thermischen Grenzschicht
N_{ϕ}	Anzahl von Gitterpunkten in azimuthaler Richtung
N_r	Anzahl von Gitterpunkten in radialer Richtung
N_z	Anzahl von Gitterpunkten in axialer Richtung
$N_{th.BI}$	minimale Anzahl der Gitterebenen in der thermischen Grenzschicht
Nu	Nusseltzahl
Pr	Prandtlzahl
\dot{Q}	Wärmestrom
R	Radius der Konvektionszelle
Ra	Rayleighzahl
Re	Reynoldszahl
T	Temperaturfeld
ΔT	Temperaturdifferenz
T_c	Temperatur an der Kühlplatte
T_h	Temperatur an der Heizplatte
T_f	Freifallzeit
T_w	Wandtemperatur
T_{∞}	Umgebungstemperatur
T_0	Referenztemperatur
U_f	Freifallgeschwindigkeit
U_{∞}	stationäre laminare und räumlich konstante Geschwindigkeit
V	horizontale Geschwindigkeit
V_{LSC}	momentane Amplitude der großskaligen Zirkulation (LSC)
V_{rms}	quadratischer Mittelwert (“root-mean-square”) der Geschwindigkeit
g	Erdbeschleunigung
p	Druck
r, ϕ, z	zylindrische Koordinaten
x, y, z	kartesische Koordinaten
u_i	Geschwindigkeitsfeld

GRIECHISCHE BUCHSTABEN

α	thermische Ausdehnungskoeffizient
χ	Ähnlichkeitsvariable
δ	Grenzschichtdicke
δ_T	thermische Grenzschichtdicke
δ_v	Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit
δ_1	Verdrängungsdicke
Δ	globales geometrisches Mittel des Gitterabstands
$\tilde{\Delta}(z)$	Maximum des geometrischen Mittels des Gitterabstands in der Höhe z
Δ_ϕ	Gitterabstände in azimuthaler Richtung
Δ_r	Gitterabstände in radialer Richtung
Δ_z	Gitterabstände in axialer Richtung
η	Ähnlichkeitsvariable
η_B	Batchelor-Skala
$\tilde{\eta}_B$	dimensionslose Batchelor-Skala
η_K	Kolmogorov-Länge
$\tilde{\eta}_K$	dimensionslose Kolmogorov-Länge
ϵ	kinetische Energiedissipationsrate
$\tilde{\epsilon}$	dimensionslose kinetische Energiedissipationsrate
Γ	Seitenverhältnis der Zelle
σ	Standardabweichung
κ	Diffusivität der Temperatur
λ	Wärmeleitfähigkeit
ϕ_{LSC}	momentaner Winkel der großskaligen Zirkulation (LSC)
ψ	Stromfunktion
ν	kinematische Viskosität
ρ	Dichte eines Fluids
τ_w	Wandschubspannung
θ	dimensionslose Temperatur
Ξ^b	normalisierte Temperatur von der unteren Platte
Ξ^t	normalisierte Temperatur von der oberen Platte

ABKÜRZUNGEN

<i>BL</i>	Grenzschicht (“Boundary Layer”)
<i>DNS</i>	direkte numerische Simulation
<i>EXP</i>	Experiment
<i>FFT</i>	Fast Fourier Transform
<i>LSC</i>	großskalige Zirkulation (“Large-Scale Circulation”)
<i>PIV</i>	Particle Image Velocimetry
<i>RB</i>	Rayleigh-Bénard
<i>TC</i>	Taylor-Couette

Abbildungsverzeichnis

2.1	Skizze für Rayleigh-Bénard-Konvektion in einer Zelle der Höhe H und Länge L	6
2.2	Verdrängungsdicke δ_1 der Grenzschicht.	9
2.3	Skizze für die erzwungene Konvektion an einer horizontalen beheizten Platte.	11
2.4	Skizze für natürliche Konvektion an einer horizontalen, beheizten Platte.	13
3.1	Skizze der zylindrischen Zelle der Rayleigh-Bénard-Konvektion.	17
3.2	Position der einzelnen Felder in einer dreidimensionalen Gitterzelle der versetzten Gitter	18
3.3	Verhältnis zwischen dem maximalen geometrischen mittleren Gitterabstand $\tilde{\Delta}(z)$ und die Kolmogorov-Skala $\eta_K(z)$ bzw. die Batchelor-Skala $\eta_B(z)$	20
4.1	Mittlere Profile der Geschwindigkeit und der Temperatur bei $Ra = 3 \times 10^9$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$	22
4.2	Mittlere Profile der Geschwindigkeit und Temperatur von Probenfeld 1 für zwei ver- schiedene Rayleighzahlen.	23
4.3	Schematische Darstellung des zweidimensionalen Analysefensters, das mit der instan- tanen großskaligen Zirkulation, der "Large-Scale Circulation" (LSC) ausgerichtet ist. .	24
4.4	Dynamisches Reskalieren der mittleren Profile für $Ra = 3 \times 10^9$ für eine unterschied- liche Anzahl von dreidimensionalen Schnappschüssen.	25
4.5	Dynamisches Reskalieren der mittleren Profile für $Ra = 3 \times 10^9$ für unterschiedliche Breiten des Fensters.	26
4.6	Fluktuation der momentanen Grenzschichtdicke der Geschwindigkeit und der thermi- schen Grenzschichtdicke an der oberen Platte der Zelle.	28
4.7	Kreuzkorrelationskoeffizienten für die zeitliche Änderung der momentanen Grenzschicht- dicke der Geschwindigkeit und thermische Grenzschichtdicke an der oberen Platte. . .	29
4.8	Richtung ϕ_{LSC} , Größe V_{LSC} und quadratischer Mittelwert der Geschwindigkeit V_{rms} senkrecht zur momentanen großskaligen Zirkulation.	31
4.9	Fit logarithmischer mittleren Temperaturprofile mit $T = A * \ln(z/H) + B$ für vier Probenfelder bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$	33

4.10	Mittlere Profile der vertikalen Geschwindigkeitskomponente für die vier Probenfelder bei $Ra = 3 \times 10^9$ & 3×10^{10} , $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$	33
5.1	Vertikale Profile der normierten Geschwindigkeit und Temperatur	38
5.2	Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnitten Schnappschusses für die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”) für $Ra = 3 \times 10^9$	40
5.3	Sequenz von neun Profilen für $Ra = 3 \times 10^9$	41
5.4	Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”) für $Ra = 3 \times 10^9$	42
5.5	Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”) für $Ra = 3 \times 10^{10}$	43
5.6	Sequenz von neun Profilen für $Ra = 3 \times 10^{10}$	44
5.7	Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”) für $Ra = 3 \times 10^{10}$	45
5.8	Radial gemittelte Temperaturprofile bei $z \approx 5\delta_T$ für jede Schnappschüsse im Fenster und die resultierende Sprungfunktion der digitalisierten Zeitreihen	46
5.9	Anpassung der zeitlich gemittelten Profile der Plumeablösungsphase mit den Vorhersagen der Grenzschichtanalyse	47
5.10	Anpassung der zeitlich gemittelten Profile der Relaminarisierungsphase mit den Vorhersagen der Grenzschichtanalyse	47
6.1	Skizze der vier Probenfelder mit Messstellen.	49
6.2	Profile der mittleren horizontalen Geschwindigkeit an der Mittellinie und ihre Standardabweichung von Experiment und DNS für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$	50
6.3	Profile der mittleren vertikalen Geschwindigkeitskomponente an der Mittellinie und ihre Standardabweichung von dem Experiment und der DNS für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$	51
6.4	Profile der mittleren Temperatur an der Mittellinie und ihre Standardabweichung vom Experiment und von der DNS für $Ra = 3 \times 10^9$ und $Ra = 3 \times 10^{10}$	52
6.5	Verdrängungsdicke der viskosen und thermischen Grenzschicht gegenüber Rayleighzahl.	54
6.6	Viskose und thermische Grenzschichtdicke durch die Anstiegsmethode gegenüber Rayleighzahl.	56
6.7	Scher-Reynoldszahl Re_s vom Experiment und DNS gegen Rayleighzahl.	58
6.8	Ausrichtung der momentanen Winkel der horizontalen Geschwindigkeitsvektoren.	59

6.9	Mittlere horizontale Geschwindigkeitsprofile an den Positionen 1, 2 und 3.	60
6.10	Mittlere vertikale Geschwindigkeitsprofile an den Positionen 1, 2 und 3.	61
7.1	Dynamisches Reskalieren der mittleren Profile für unterschiedliche Prandtlzahlen. . . .	65
7.2	Richtung ϕ_{LSC} , Größe $(V_{LSC} - \langle V_{LSC} \rangle)/U_f$ der momentanen großskaligen Zirkulation bei $z_0 = H - \delta_T$ für die obere Platte bei unterschiedlichen Prandtlzahlen.	66
7.3	Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnitten Schnappschusses für die Plumeablösungsphase (“plume detachment event”) für $Pr = 7$	67
7.4	Sequenz von neun Profilen für $Pr = 7$	68
7.5	Sequenz von drei vertikalen Ebenen des geschnittenen Schnappschusses für die Relaminarisierungsphase (“post-plume-detachment phase”) für $Pr = 7$	69
7.6	Schnappschuss mit dreidimensionalen Stromlinien und Wirbel in einer turbulenten Konvektion Zelle für unterschiedliche Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$	70
7.7	Horizontale Querschnitte des Temperaturfeldes vom momentanen Schnappschuss bei $z = \delta_T$ und bei $z = H/2$ für unterschiedliche Prandtlzahlen.	72
7.8	Vertikale Querschnitte des Temperaturfeldes vom momentanen Schnappschuss für unterschiedliche Prandtlzahlen.	73
7.9	Mittlere Temperaturprofile für $Pr = 7, 0.7, 0.1$, $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$	74
7.10	Gleichmäßige Verteilung des horizontalen Querschnittes bei $z = \delta_T$ in 36 kleine Teilgebiete	76
7.11	Richtung ϕ_{LSC}^i und Größe V_{LSC}^i der momentanen großskaligen Zirkulation bei $z = \delta_T$ in 36 kleine Teilgebiete.	77

Tabellenverzeichnis

3.1	Gitterauflösungen für unterschiedliche Prandtl- und Rayleighzahlen	19
4.1	Parameter A und B für $T = A * \ln(z/H) + B$ bei $Ra = 3 \times 10^9$ bzw. $Ra = 3 \times 10^{10}$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 1$	34
6.1	Viskose und thermische Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode	54
6.2	Vergleich der Exponenten nach der Skalierungsgesetze von numerischen Simulationen und Experimenten.	55
6.3	Viskose und thermische Grenzschichtdicken durch die Anstiegsmethode	57
6.4	Viskose und thermische Grenzschichtdicken durch die Verdrängungsmethode an allen vier Positionen	63
7.1	Thermische Grenzschichtdicken für verschiedene Prandtlzahlen bei $Ra = 3 \times 10^9$ und $\Gamma = 1$	75